

# „Negative“ Verlustfaktoren bei Kapazitätsmessungen

Vortrag zum 326. PTB-Seminar

2024-05-15

Dipl.-Ing. (FH) Harald Bothe

PTB-Arbeitsgruppe 2.12

Verhältnismessung und Impedanz

**Zusammenfassung:** Bei einem Plattenkondensator mit Luftdielektrikum vom Typ HP16381A, Nennwert 1 pF, führt eine lockere Schraube lageabhängig zu starken Änderungen der Kapazitätsablesungen. Die beobachteten Beträge des Verlustfaktors sind viel zu groß für den Kondensatortyp und darüber hinaus auch noch negativ.

Es wird ein Ersatzschaltbild entwickelt, mit dem sich das beobachtete Fehlerbild erklärt. Im Zuge der Herleitung folgt ein Blick unter die Abschirmung und es werden weitere Eigenschaften des Kondensatortyps diskutiert. Am Ende kann der Kondensator kalibriert entlassen werden.

**Schlagworte:** Kalibrierung, Kapazität, Verlustfaktor, negativer Verlustfaktor, Kapazitätsnormal, Kondensator, Luftkondensator, Kondensatorersatzschaltbild, Abschirmung, Gehäusekapazität, Schutzringkondensator

# Einleitung und Motivation

Ein Kunde hat einen Kondensator vom Typ HP16381A mit einer Lageabhängigkeit.

Lageabhängigkeit? – Ja, die Kapazitäts- und Verlustfaktorablesung ändert sich, je nach Position.

- Interessant, schickt mal vorbei...

In der Regel zeichnen sich „Normale“ eben dadurch aus, wenigstens unter Laborbedingungen den Wert der von ihnen dargestellten Messgröße unerschütterlich zu bewahren. Wenn sich Umgebungsbedingungen auswirken, dann steht die Raumtemperatur immer an erster Stelle. Für Kapazitäten sind auch Luftfeuchte und Luftdruck oft zu berücksichtigende Einflussgrößen. Oder die Zeit (-liche Drift), aber die Lage?

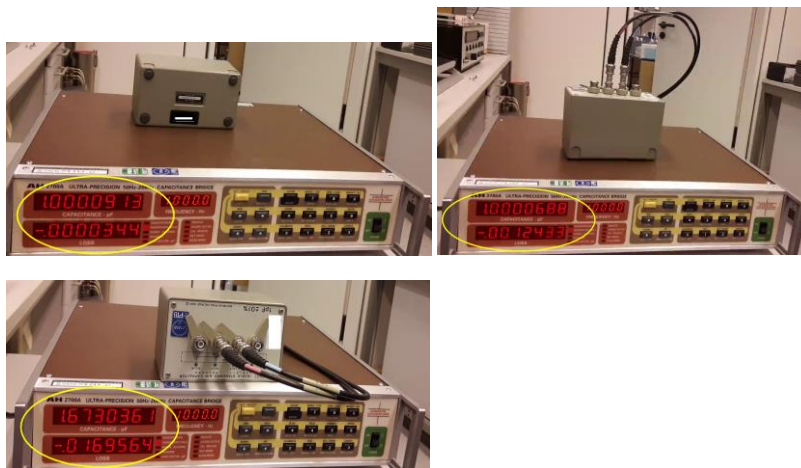


Abb. 1.. 3: Bildschirmfotos aus einem Video. Es wurden verschiedene Positionen getestet, u. a. zeigte sich auch, dass die BNC-Verbinder keineswegs stabile Verbindungen gewährleisten.

Die Abbildungen 1 bis 3 zeigen nicht nur eine starke Änderung der Kapazitätsablesung. Auch die Verlustfaktorablesung benimmt sich sehr merkwürdig: Zum einen ist der Betrag in jedem Fall viel zu groß und negativ. Wie kann das sein?

## Vorüberlegungen

Beim Typ HP16380A handelt es sich um Plattenkondensatoren mit Luftdielektrikum. Auch wenn im Gehäuse keine losen Teile geklappt haben, ist schnell klar, dass es sich um einen mechanischen Defekt handeln muss.

Aber wie lässt sich ein negativer Verlustfaktor erklären, wenn in der Definition nur positive Zahlenwerte vorkommen?

Es besteht das Risiko, einem Referenzkondensator einen kleineren als den tatsächlichen Verlustfaktorwert beizuordnen. Damit werden die Verlustfaktoren der Kalibriergegenstände im Vergleich zur Referenz zu klein kalibriert. Ist der wahre Verlustfaktor des Kalibriergegenstandes kleiner als der der Referenz, erhält man tatsächlich einen negativen Verlustfaktor. Allerdings sollte sich der Betrag des negativen Verlustfaktors in der Größenordnung der Messunsicherheiten bewegen, sofern die Messung und die Messunsicherheitsabschätzung einwandfrei sind.

Kondensatoren bestehen prinzipiell aus zwei, durch ein Dielektrikum isolierte Elektroden. Die Kapazität berechnet sich aus der gegenüberliegenden Elektrodenfläche  $A$ , dem Abstand  $d$  zwischen den Platten und der Materialkonstante des Dielektrikums nach der Formel (1). Für einen Plattenkondensator mit Luft als Dielektrikum ist die Materialkonstante  $\epsilon_r = 1$ , sofern keine Luftfeuchte im Spiel ist.

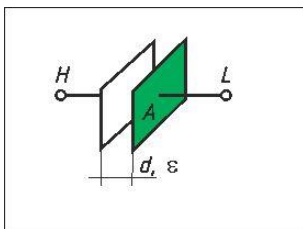


Abb.2: Ein einfacher Plattenkondensator

$$(1) \quad C = \epsilon \frac{A}{d}$$

$A$  – Plattenfläche  
 $d$  – Plattenabstand  
 $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$  – Dielektrikum

Die angegebene Formel ist aber nur gültig für die Kapazität für einen Ausschnitt der Fläche  $A$  zwischen zwei unendlich ausgedehnten, parallelen Elektroden. An endlichen Elektroden bilden sich Randfelder aus. Es tragen sämtliche Teilflächen des H- und L-Potentiales integral zur Gesamtkapazität bei. Weitere Potentiale wirken sich entsprechend der Geometrie des Aufbaus (Betrag des Potentials, Ausdehnung und Abstand zu den Elektroden) auf die Kapazitätsablesung aus. Dementsprechend ist die Formel (1) nur als eine Näherung zu betrachten.

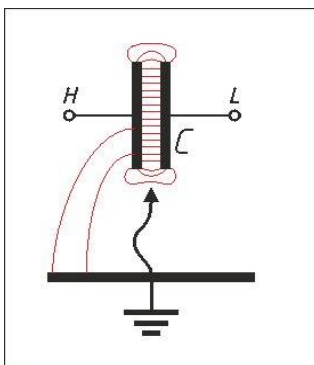


Abb.3: Ein Plattenkondensator mit Rand- und Fremdfeldern

In den folgenden Abbildungen sind die Inhomogenitäten nur zur Veranschaulichung angedeutet.

## Was kann man dagegen machen?

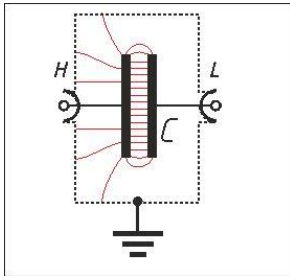


Abb. 4: Schirmung

### (elektrostatische) Schirmung

Ein geschlossenes, leitfähiges und geerdetes Gehäuse bildet einen Schirm für unseren Kondensator, der Fremdfelder zuverlässig abhält. Bei den meisten Messeinrichtungen ist das Low-Potential gleich dem Erdpotential (nicht identisch, Stichwort „Wagner-Erde“, Stoff für einen eigenen Vortrag). Ein geschirmter Kondensator weist zwar immer noch Kapazitäten zwischen dem High- bzw. Low-Anschluss gegen Erde auf, die sind aber stabil und damit korrigierbar.

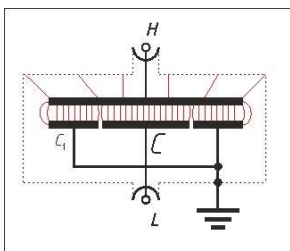


Abb. 5: Schutzringprinzip

### Schutzringprinzip

Man kann zwar keine unendlich ausgedehnten Elektroden herstellen, aber ein (quasi-) homogenes Feld ausschneiden. Dazu wird die Low-Elektrode mit einem äußeren Ring umgeben. Zwischen den Segmenten bleibt ein dünner, isolierender Spalt. Die innere Fläche bildet die zu messende Hauptkapazität und liegt auf Low-Potential der Brücke. Der umgebende Schutzring nimmt die Randfelder auf. Er muss an eine Hilfsstromquelle mit einem Low-ähnlichen Potential angeschlossen werden. Für diesen Aufbau gilt die o.g. Kapazitätsformel recht gut. Der praktische Kondensator wird durch den Schutzring größer, aber kleine Nennwerte sind nach dem Verfahren leichter herstellbar.

# Mathematisches Modell

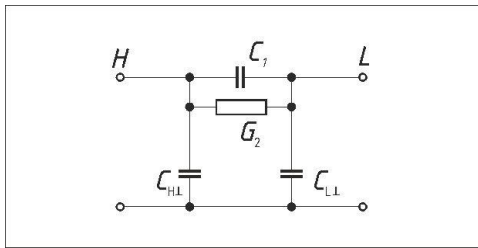


Abb. 6: Ein (stark vereinfachtes) Kondensatormodell

Das Modell in Abb. 6 enthält die bislang besprochenen Komponenten eines Plattenkondensators: Die Hauptkapazität  $C_1$  bildet sich im Wesentlichen aus Plattenfläche und Plattenabstand. Leitwert  $G_2$  steht für die ohmschen Verluste in den Platten und auf deren Oberflächen. Mit  $C_{H\perp}$  und  $C_{L\perp}$  werden die Gehäusekapazitäten modelliert.

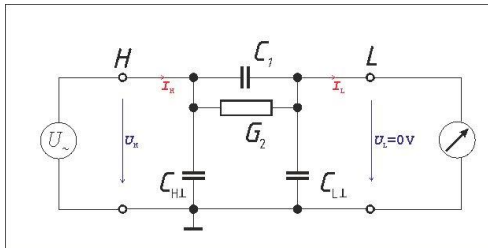


Abb. 7: ... und was die Messbrücke daraus macht.

Die meisten LCR-Meter legen gemäß Abbildung 7 eine Spannung am High-Tor an den Kondensator und messen den Strom am Low-Tor unter der Voraussetzung, dass die Ausgangsspannung Null ist. Das komplexe Verhältnis aus Eingangsspannung  $U_H$  und Ausgangsstrom  $I_L$  ergibt nach (2) eine Impedanz  $Z$  oder Admittanz  $Y$ . Daraus lassen sich alle interessanten Komponenten  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $\tan \delta$ ,  $Q$ ,  $G$  und Phasenwinkel berechnen.

$$(2) \quad Y = \left. \frac{I_L}{U_H} \right|_{U_L=0V}$$

Der Vorteil dieser idealisierten Darstellung besteht darin, dass sich die Gehäusekapazitäten – zumindest prinzipiell – vernachlässigen lassen. Die Gehäusekapazität am High-Tor liegt parallel zur Spannungsquelle. Damit wird die Quelle zwar belastet, aber dieser Strom geht nicht in die Messung ein. Die Gehäusekapazität am Low-Tor wird durch die Bedingung  $U_L = 0 \text{ V}$  kurzgeschlossen, so dass der Strom  $I_L$  nur durch die zu kalibrierende Hauptkapazität  $C_1$  und der Ableitung  $G_2$  fließt:

$$(3) \quad Y = \left. \frac{I_L}{U_H} \right|_{U_L=0V} = G_2 + j\omega C_1$$

In der Definition des Verlustfaktors

$$(4) \quad \tan \delta = \frac{G_2}{\omega C_1}$$

findet sich kein Hinweis auf negative Ergebnisse.

# Herleitung eines Modells für negative Verlustfaktoren an einem praktischen Beispiel

Die Abbildung 8 zeigt den Plattenstapel eines Kondensators HP168381A, 1 pF. Bei gegebener Plattenfläche reicht der Abstand zwischen High- und Low-Elektrode nicht aus, um die effektive Kapazität auf 1 pF zu begrenzen. Es sind zwei Schirmplatten mit je einem Fenster dazwischen montiert. Analog zum Schutzring wird die effektive Kapazität begrenzt und der Aufbau sorgt für definierte Verhältnisse. Zur Verdeutlichung sind in Abbildung 9 die Potentiale im Kondensator farblich hervorgehoben.

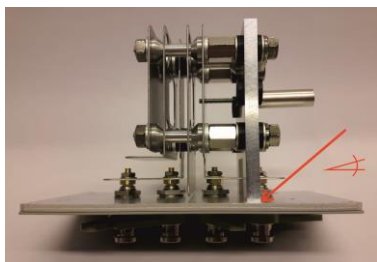


Abb. 8: Plattenstapel HP168381A. Kleine Ursache, ...

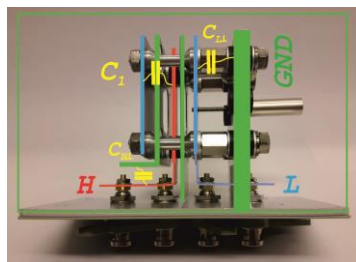


Abb. 9: Potentialzuordnung im Plattenstapel

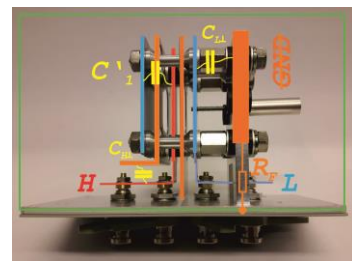


Abb. 10: Potentiale, wenn ein Fehlerwiderstand dazukommt

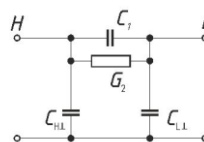


Abb. 6: Ein (stark vereinfachtes) Kondensatormodell

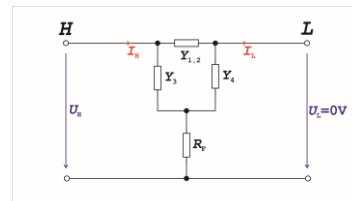


Abb. 11: Kondensatormodell mit „schlechtem“ Schirm

Bei dem Normal mit der „Lageabhängigkeit“ hat nichts geklappt, als es bewegt wurde. Am geöffneten Normal konnte ein ganz feiner Spalt zwischen der Frontplatte mit den Anschlussbuchsen und dem Trägerblech, an dem der Plattenstapel angeschlagen ist, festgestellt werden. Wenn man ganz genau hinsieht und das Normal in der entsprechenden Position liegt.

Von den Außenleitern in der Frontplatte zu den Schirmplatten sollte Durchgang bestehen, damit die Schirmplatten ihre Aufgabe erfüllen können. Stattdessen haben wir einen Widerstand von einigen  $k\Omega$  gemessen. Die Schirmplatten liegen damit nicht auf Erd-/Low-Potential, sondern irgendwo Richtung High.

Das Modell, das sich eingangs einfach mit

$$(3) \quad Y = \frac{I_L}{U_H} \Big|_{U_L=0V} = \omega C_1 (j + \tan \delta)$$

dargestellt hat, wird durch Hinzufügen eines einzigen Widerstandes an ungünstiger Stelle recht unhandlich, weil die Gehäusekapazitäten voll berücksichtigt werden müssen und münden in einer deutlichen Zunahme der Kapazitätsablesung und führen zu einem negativen Verlustfaktor.

$$(5) \quad \text{Im}\{Y\}: C' = C_1 + \frac{\omega^2 C_3 C_4 R_F^2 (C_3 + C_4)}{1 + [\omega R_F (C_3 + C_4)]^2}$$

$$(6) \quad \frac{\text{Re}\{Y\}}{\text{Im}\{Y\}}: \tan \delta' = \frac{G'}{\omega C'} = \frac{G_2 \{1 + [\omega R_F (C_3 + C_4)]^2\} - \omega^2 C_3 C_4 R_F^2}{\omega C_1 \{1 + [\omega R_F (C_3 + C_4)]^2\} + \omega^3 C_3 C_4 R_F^2 (C_3 + C_4)}$$

Die vollständige Herleitung ist im Anhang beigefügt.

# Prüfung des mathematischen Modells

Mit dem mathematischen Modell lässt sich der Kapazitätsanstieg und der stark negative Verlustfaktor des Normals durch einen Außenleiterwiderstand  $R_F$  zeigen.

Zur Überprüfung der Theorie ist eine Schaltbox mit schaltbaren Außenleiterwiderständen  $0\ \Omega$  und  $200\ \text{k}\Omega$  aufgebaut worden. Die Schaltbox wurde am High-Terminal in die Messleitung eingeschleift. Am Low-Terminal ist nur der Innenleiter verbunden. Diese Testschaltung lässt sich auch auf viertorige Anschlussweise erweitern. Bitte dann die Außenleiterverbindungen gemäß Herstellervorgaben an den Messleitungen vornehmen.

Solange der Außenleiterwiderstand am High-Terminal des Normals GR1404-B-2933,  $100\ \text{pF}$ ,  $R_F \approx 0\ \Omega$  beträgt, unterscheidet sich die Ablesung zur vollgeschirmten Anschlussweise praktisch nicht. Bei  $R_F = 200\ \text{k}\Omega$  steigt die Kapazitätsablesung und die Verlustfaktorablesung wird erwartungsgemäß stark negativ.



Abb. 11 .. 13: Referenzmessung GR1404-B-2933 in dreipoliger Anschlussweise, mit Adapter zur Vergleichsmessung  $R_F \approx 0\ \Omega$  und mit zugeschaltetem Außenleiterwiderstand  $R_F = 200\ \text{k}\Omega$ .

Größe	gemessen	berechnet	→
$C_1 / \text{pF}$	99,995 581		Der Test funktioniert entsprechend auch bei Viertoren
$\tan \delta_2$	$2,8 \times 10^{-6}$		→ Das (stark vereinfachte) mathematische Modell sagt den negativen Verlustfaktor recht gut voraus,
$C_3 / \text{pF}$	30		→ die Kapazitätszunahme ist aber zu gering abgeschätzt.
$C_4 / \text{pF}$	28		
$R_F / \text{k}\Omega$	200		
$C' / \text{pF}$	100,242 8	100,072	
$\tan \delta'$	-0,016 4	-0,010 5	

Während das hier hergeleitete mathematische Modell den negativen Verlustfaktor recht gut abbildet, schätzt das Modell die Kapazitätsänderung nicht zufriedenstellend ab.

Für eine bessere Übereinstimmung muss das mathematische Modell z. B. durch Berücksichtigung der Messleitungen und der inneren Zuleitungsimpedanzen verfeinert werden.



# Innenansichten HP16380A

Bei dem Typ HP16380A handelt es sich um Plattenkondensatoren mit Luftdielektrikum. Auf den folgenden Abbildungen sind die Plattenaufbauten der verschiedenen Nennwerte von 1 pF bis 1 nF dargestellt.

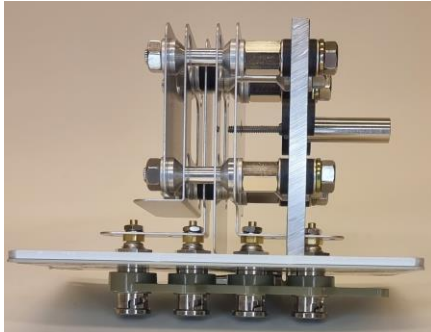


Abb. 14: HP16381A, 1 pF

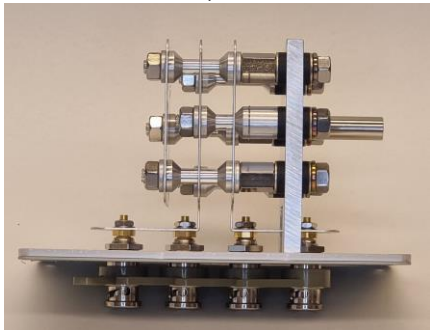


Abb. 15: HP16382A, 10 pF

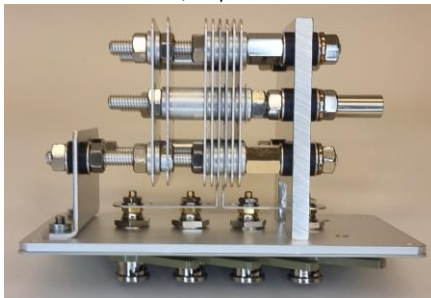


Abb. 16: HP16383A, 100 pF

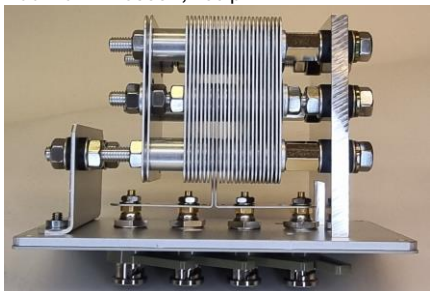


Abb. 17: HP16384A, 1 nF

Die Plattenstapel der Normale HP16382A, HP16383A und HP16384A unterscheiden sich nur durch Anzahl und Abstand der Platten, die zum Erreichen der Nennkapazität erforderlich sind: Gemäß (1) vergrößert sich die Gesamtkapazität mit zunehmender Elektrodenfläche und abnehmendem Elektrodenabstand.

Während bei HP16382A die Nennkapazität von noch durch einen recht großen Plattenabstand erreicht werden kann, muss für HP16381A die effektive Fläche bzw. Kapazität durch Schirmbleche verringert werden.

Beginnend am Trägerblech werden die Low- und High-Platten mit Abstandshaltern abwechselnd auf Gewindebolzen aufgefädelt. Jeweils drei Gewindebolzen verbinden die einzelnen Platten zu einer High- und einer Low-Elektrode. Zwei Elektroden mit Anschlusslaschen sind an die Innenleiter der BNC-Stecker angeschlossen. Die rechte Platte ist jeweils an Low-Potential angeschlossen und schirmt die High-Platte weitgehend vom Außenleiterpotential des Trägerblechs ab. Die Kapazitäten gegen den Außenleiter werden durch den größeren Abstand zwischen Plattenstapel und Gehäuseteilen geringgehalten.

Die beiden abgesetzten Platten in Abbildungen 16 und 17 dienen zum Grobabbgleich. Ein Feinabbgleich erfolgt mit einer Trimmschraube, die in dem rechts herausragenden Zylinder verborgen und unter dem (bei vielen Normalen beschädigten) Siegel von außen zugänglich ist.

**Nebenbemerkung:** Im Lieferzustand ist die Schraube für den Feinabbgleich versiegelt. Sollte sich das Siegel gelöst haben oder beschädigt sein, empfiehlt es sich, die Gehäuseöffnung mit einer Kalibriermarke o. ä. zu verschließen. Neugierige und Unvorsichtige seien gewarnt, die Trimmung ohne Not zu verändern: Kurzfristig mag die Ablesung für das Normal dichter am Nennwert liegen, mittel- bis langfristig wird die Ablesung aber driften, bis sich die mechanischen Spannungen zwischen Schraube und



Gewinde abgebaut haben. Die Historie weist danach einen Sprung auf und die aktuelle Kalibrierung ist damit ungültig.

Auch wenn das Siegel nicht beschädigt ist, sind die Normale nicht hermetisch dicht. Neben der allfälligen Temperaturabhängigkeit muss auch mit einem Einfluss der Luftfeuchte gerechnet werden. Allerdings hat die Messung der relativen Luftfeuchte der Umgebungsluft wenig mit den Verhältnissen im Kondensator zu tun. Hier wäre der absolute Wassergehalt interessant, der sich in der Luft zwischen und vor allen Dingen kondensiert auf den Platten befindet.

Der Aufbau der HP16380A-Kondensatoren ist nicht symmetrisch. Die Vertauschung von High- und Low-Anschlüssen führt je nach Nennwert zu Abweichungen in der Größenordnung  $10^{-5} \frac{F}{F}$  in der Kapazitätsablesung. Der Verlustfaktor bleibt – im Rahmen der Messunsicherheiten – unverändert. Es ist demnach strikt auf die richtige Anschlusszuordnung zu achten.

# Reparatur der Lageabhängigkeit

## Plausibilitätstest

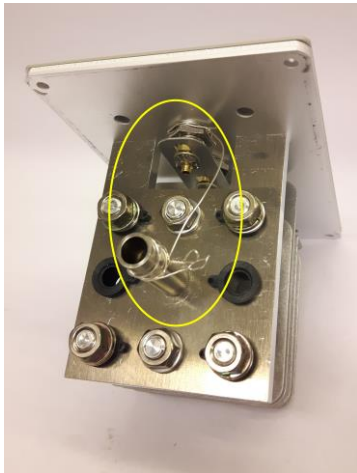


Abb. 18: Tüldendraht hilft

Bevor weitere Maßnahmen ergriffen wurden, die das Normale möglicherweise weiter beschädigen, ist zunächst mit einer einfachen Maßnahme überprüft worden, ob die Vorüberlegungen zielführend sind.

Eine Drahtbrücke zwischen der Trägerplatte und den Außenleitern hat den Übergangswiderstand provisorisch kurzgeschlossen.

Sowohl die Lageabhängigkeit als auch die fehlerhaften Ablesungen sind durch den Kurzschluss beseitigt worden.

## Reparatur

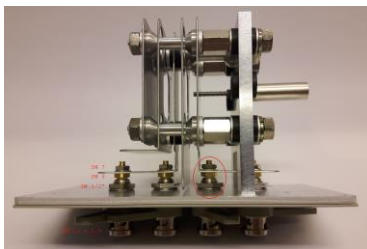


Abb. 19: Schlüsselweiten und Knackpunkt

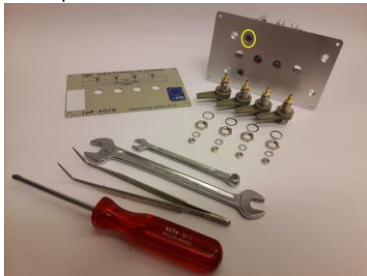


Abb. 20: Wurzel diesen Übels

Um die Ursache nachhaltig zu beseitigen, musste das Normal fast vollständig zerlegt werden: Die lose Schraube ist hinter der Frontblende versteckt, die mit den BNC-Buchsen befestigt ist. Die Demontage der Buchsen wäre einfach, machte es die innere Low-Buchse (Abb.19, rote Markierung) nicht zu einem Geduldsspiel: Die Mutter ist - von der Trägerplatte verdeckt - kaum mit dem Schraubenschlüssel erreichbar. Beim Zusammenbau muss die Mutter dann aber erstmal überhaupt angesetzt werden.

Sind die vier BNC-Buchsen demontiert, kann die Frontblende abgenommen werden. Dann liegen die Befestigungsschrauben der Trägerplatte offen. Wir haben die Schrauben mit Zahnscheiben zunächst komplett entfernt, die Oberflächen gereinigt und sofort wieder zusammengesetzt. Die Schrauben wurden so fest angezogen, wie es ohne Beschädigung des Antriebskreuzes möglich ist.

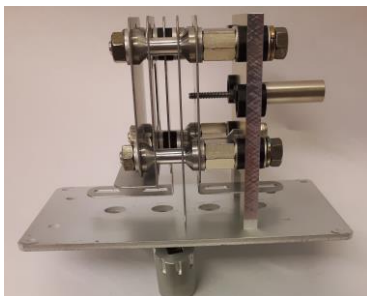


Abb. 21: Der Plattenstapel muss zur Reparatur nicht verändert werden

Sowohl die Trägerplatte als auch die Frontplatte sind aus Aluminium. Die Schrauben und die Zahnscheiben vermutlich aus Edelstahl. Da sich die Oberfläche von Alu selbst mit einer gut isolierenden Oxidschicht passiviert, sind denkbar schlechte Voraussetzungen für einen dauerhaft niedrigen Übergangswiderstand gegeben. Zwischen den Stahl- und Aluminiumteilen kann es aufgrund der Elektrochemie zu zusätzlicher Oxidation kommen. Können Alu-Teile kaltverschweißen?

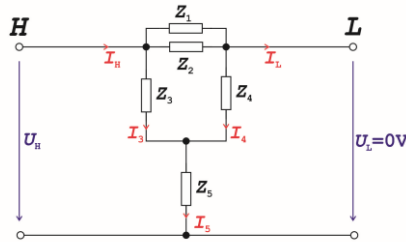
## Fazit

- Ein mechanischer Defekt hat zur beobachteten Lageabhängigkeit geführt.
- Es wurde anhand eines mathematischen Modells die Fehlerursache eingegrenzt.
- Das Modell verifiziert den beobachteten negativen Verlustfaktor.
- Der Effekt kann durch einen schaltbaren Außenleiterwiderstand reproduziert werden.
- Schlechte und/oder verschmutzte Steckkontakte wirken sich entsprechend aus.
  - Bitte Normale regelmäßig, spätestens vor der Kalibrierung reinigen!
  - Defekte oder unsichere Steckverbinder austauschen. Vorher- und Nachhermessungen nicht vergessen, ggf. ist eine externe Rekalibrierung erforderlich.
- Einblick in das Innenleben von HP16380A-Kondensatoren:
  - Plattenaufbau HP16381A mit Schutzringprinzip
  - Nennwerte der anderen Nennwerte 10 pF, 100 pF und 1 nF werden durch mehr Platten – gleich mehr Oberfläche - und kleinerem Plattenabstand erreicht
    - Plattenaufbau nicht symmetrisch: High und Low dürfen nicht vertauscht werden!
    - Normale sind quasi offen, d.h. sie sind luftfeuchteabhängig
    - Aluminiumkomponenten führen zu hoher Temperaturabhängigkeit
- Reparatur des Normals

## Anhang: Herleitung für den negativen Verlustfaktor

Bei dem kleinen Nennwert HP16381A, 1 pF, muss die effektive Kapazität durch eine Blende begrenzt werden, die leitend mit dem Außenleiterpotential verbunden ist. Dies entspricht dem Schutzringprinzip, bei dem sich die Hauptkapazität zwischen dem High- und Low-Anschluss mit einem nahezu ideal-homogenen elektrischen Feld ausbildet und die Verschiebestrome des Randfeldes über den eine Hilfsquelle am Außenleiter aufgebracht werden. Die Hauptkapazität ist damit leicht berechenbar.

Bildet sich zwischen den Konstruktionselementen ein Übergangswiderstand, verschiebt sich das Potential der Schirmelektrode gegenüber den High- und Low-Elektroden.



$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{U_H}{I_L} \Big|_{U_L=0V}$$

$$I_1 = \frac{U_H}{Z_1} \quad // \text{ da } U_L = 0V$$

$$I_2 = \frac{U_H}{Z_2}$$

$$I_L = I_1 + I_2 + I_4$$

$$\frac{U_4}{U_H} = \frac{Z_4 Z_5}{(Z_4 + Z_5) \left( Z_3 + \frac{Z_4 Z_5}{Z_4 + Z_5} \right)} = \frac{Z_4 Z_5}{Z_3 (Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5}$$

$$I_4 = \frac{U_4}{Z_4} = \frac{Z_4 Z_5}{Z_3 (Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5} \frac{U_H}{Z_4} = \frac{Z_5}{Z_3 (Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5} U_H$$

$$I_L = \frac{U_H}{Z_1} + \frac{U_H}{Z_2} + \frac{Z_5}{Z_3 (Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5} U_H$$

$$Y = \frac{I_L}{U_H} \Big|_{U_L=0V} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{Z_5}{Z_3 (Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5} = G' + j\omega C'$$

Mit den komplexen Komponenten des Ersatzschaltbildes

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1} \quad Y_1 = j\omega C_1$$

$$Z_2 = R_2 \quad Y_2 = G_2$$

$$Z_3 = \frac{1}{j\omega C_3} \quad Y_3 = j\omega C_3$$

$$Z_4 = \frac{1}{j\omega C_4} \quad Y_4 = j\omega C_4$$

$$Z_5 = R_F \quad Y_5 = G_F$$

$$\begin{aligned} Y = \frac{I_L}{U_H} \Big|_{U_L=0V} &= \omega C' (\tan \delta' + j) = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{Z_5}{Z_3(Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5} \\ &= j\omega C_1 + G_2 + \frac{R_F}{\frac{1}{j\omega C_3} \left( \frac{1}{j\omega C_4} + R_F \right) + \frac{1}{j\omega C_4} R_F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{R_F}{\frac{1}{j\omega C_3} \left( \frac{1}{j\omega C_4} + R_F \right) + \frac{1}{j\omega C_4} R_F} = \frac{R_F}{\frac{-1}{\omega^2 C_3 C_4} + \frac{1}{j\omega C_3} R_F + \frac{1}{j\omega C_4} R_F} \\ &= \frac{-\omega^2 C_3 C_4 R_F}{1 - \frac{\omega^2 C_3 C_4 R_F}{j\omega C_3} - \frac{\omega^2 C_3 C_4 R_F}{j\omega C_4}} = \frac{-\omega^2 C_3 C_4 R_F}{1 + j\omega C_4 R_F + j\omega C_3 R_F} = \frac{-\omega^2 C_3 C_4 R_F}{1 + j\omega R_F (C_4 + C_3)} \\ &= \frac{-\omega^2 C_3 C_4 R_F [1 - j\omega R_F (C_4 + C_3)]}{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2} = j \frac{\omega^3 C_3 C_4 R_F^2 (C_4 + C_3)}{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2} - \frac{\omega^2 C_3 C_4 R_F}{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = \frac{I_L}{U_H} \Big|_{U_L=0V} &= G' + j\omega C' = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{Z_5}{Z_3(Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5} \\ &= j\omega C_1 + G_2 - \frac{\omega^2 C_3 C_4 R_F}{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2} + j \frac{\omega^3 C_3 C_4 R_F^2 (C_4 + C_3)}{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}\{Y\} = \omega C' = \omega C_1 + \frac{\omega^3 C_3 C_4 R_F^2 (C_4 + C_3)}{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2}$$

$$C' = C_1 + \frac{\omega^2 C_3 C_4 R_F^2 (C_4 + C_3)}{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2}$$

$$\operatorname{Re}\{Y\} = G' = G_2 - \frac{\omega^2 C_3 C_4 R_F}{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2}$$

$$\tan \delta' = \frac{G'}{\omega C'} = \frac{G_2 - \frac{\omega^2 C_3 C_4 R_F}{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2}}{\omega C_1 + \frac{\omega^3 C_3 C_4 R_F^2 (C_4 + C_3)}{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2}} = \frac{G_2 \{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2\} - \omega^2 C_3 C_4 R_F}{\omega C_1 \{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2\} + \omega^3 C_3 C_4 R_F^2 (C_4 + C_3)}$$

$$\boxed{\tan \delta' = \frac{G_2 \{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2\} - \omega^2 C_3 C_4 R_F}{\omega C_1 \{1 + [\omega R_F (C_4 + C_3)]^2\} + \omega^3 C_3 C_4 R_F^2 (C_4 + C_3)}}$$