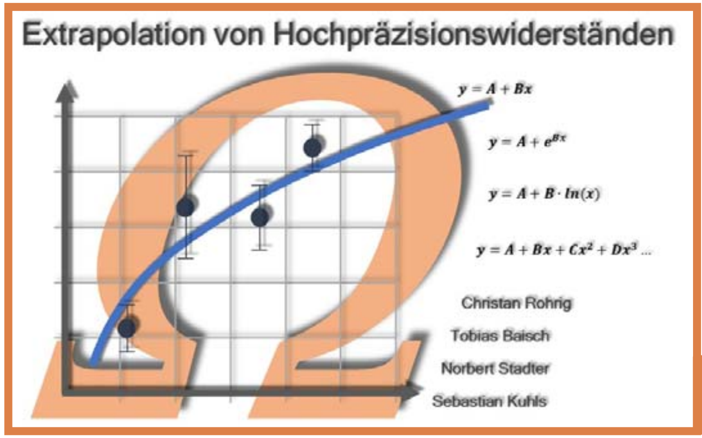
Extrapolation von Hochpräzisionswiderständen

Tobias Baisch, Sebastian Kuhls, Christian Rohrig, Norbert Stadter



h_da
HOCHSCHULE DARMSTADT
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
fbeit
FACHBEREICH ELEKTROTECHNIK
UND INFORMATIONSTECHNIK

Agenda

1 Einleitung

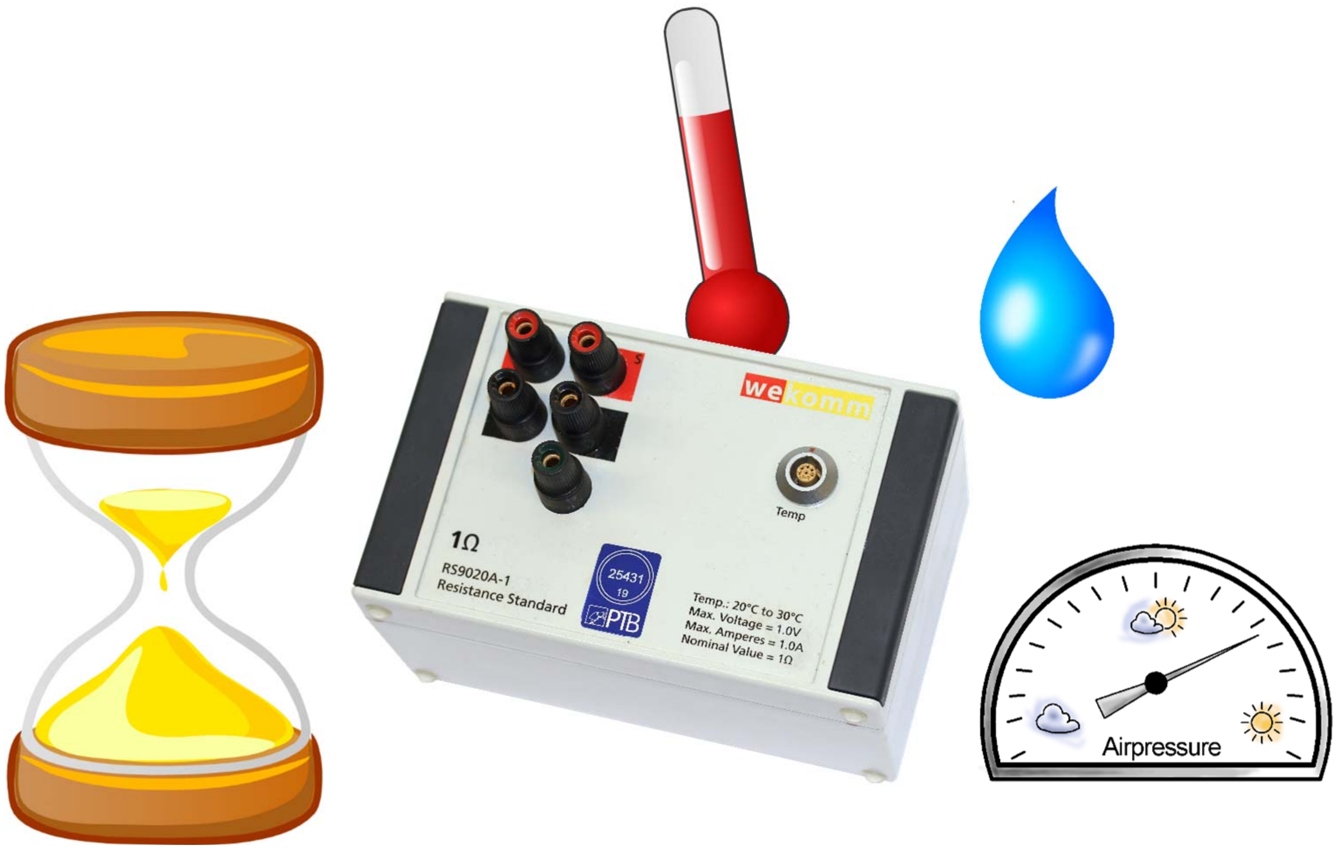
2 Regressionsberechnung

- Unsicherheitsberechnung
- Gewichtung
- Probleme

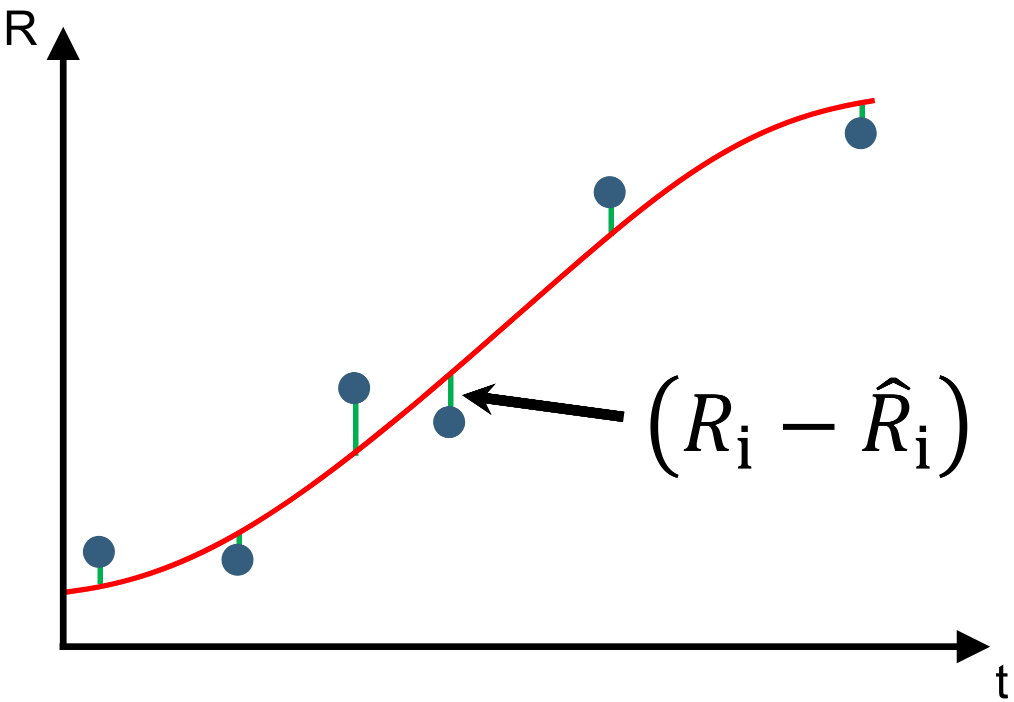
3 Behandlung von Ausreißern

Hochpräzisionswiderstände

- Widerstände reagieren empfindlich auf Änderungen von
  - Temperatur
  - Feuchte
  - Druck
  - **Zeit**



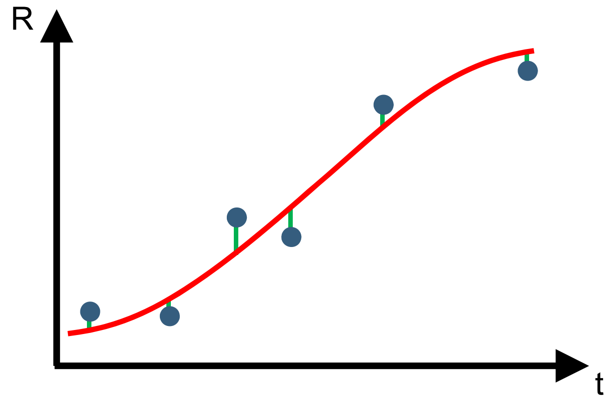
Stand der Technik: Regressionsanalyse



- Methode der kleinsten Fehlerquadrate
- Nach Carl Friedrich Gauß

Ansätze der Regressionsrechnung

- Linear $\hat{R} = A + B \cdot t$
- Polynom $\hat{R} = A + B \cdot t + C \cdot t^2$
- Logarithmisch $\hat{R} = A + B \cdot ln(t)$
- Exponentiell $\hat{R} = \alpha + \exp(\beta \cdot t)$



Werden in der Praxis nicht verwendet.

Warum?

Beispiel

- Linearer Ansatz

$$\hat{R} = (A + B \cdot t)$$

- Summe der Quadrate der Abweichungen

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} (R_{\mathrm{i}} - \hat{R})^2$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} (R_i - \boxed{(A + B \cdot t)})^2$$

Beispiel

$$V = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} (R_{\mathrm{i}} - (A + B \cdot t))^2$$

partielle Ableitung $\partial V / \partial A$ und $\partial V / \partial B$

Minimum der Fehlerquadrate:
Durch Ableitungen und setzen von $V = 0$

„Lineares“ Gleichungssystem nach A und B lösen
Ergebnis: Regressionsfunktion $\hat{R} = A + B \cdot \mathrm{t}$

Beispiel

- Vereinfachung nach M. Blaha

$$B = \frac{\boxed{\sigma(t,R)}}{\boxed{\sigma(t)}}$$

Kovarianz $= \frac{1}{n-1} \sum[(t - \bar{t})(R - \bar{R})]$

Varianz $= \frac{1}{n-1} \sum(t - \bar{t})^2$

$$A = \bar{R} - B \cdot \bar{t}$$

$$\hat{R} = A + B \cdot t$$

Beispiel

- Vereinfachung nach M. Blaha

$$B = \frac{\boxed{\sigma(t,R)}}{\boxed{\sigma(t)}}$$

Kovarianz $= \frac{1}{n-1} \sum[(t - \boxed{\bar{t}})(R - \boxed{\bar{R}})]$

Varianz $= \frac{1}{n-1} \sum(t - \boxed{\bar{t}})^2$

$$A = \boxed{\bar{R}} - B \cdot \boxed{\bar{t}}$$

$$\hat{R} = A + B \cdot t$$

Mittelwerte

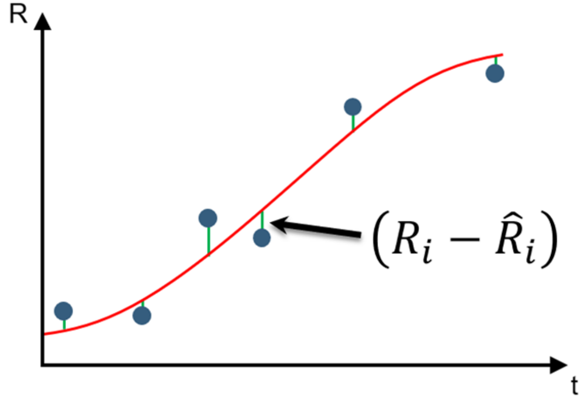
Regressionsberechnung

Unsicherheiten der linearen Regression

- Standardabweichung der Residuen

$$\sigma_{\mathrm{R}}^2 = \frac{1}{n-2}\sum(R_{\mathrm{i}} - A - B \cdot t_{\mathrm{i}})^2$$

- Koeffizienten



$$\sigma_{\mathrm{A}}^2 = \frac{\sigma_{\mathrm{R}}^2 \sum t_{\mathrm{i}}^2}{\Delta_{\mathrm{li}}}$$

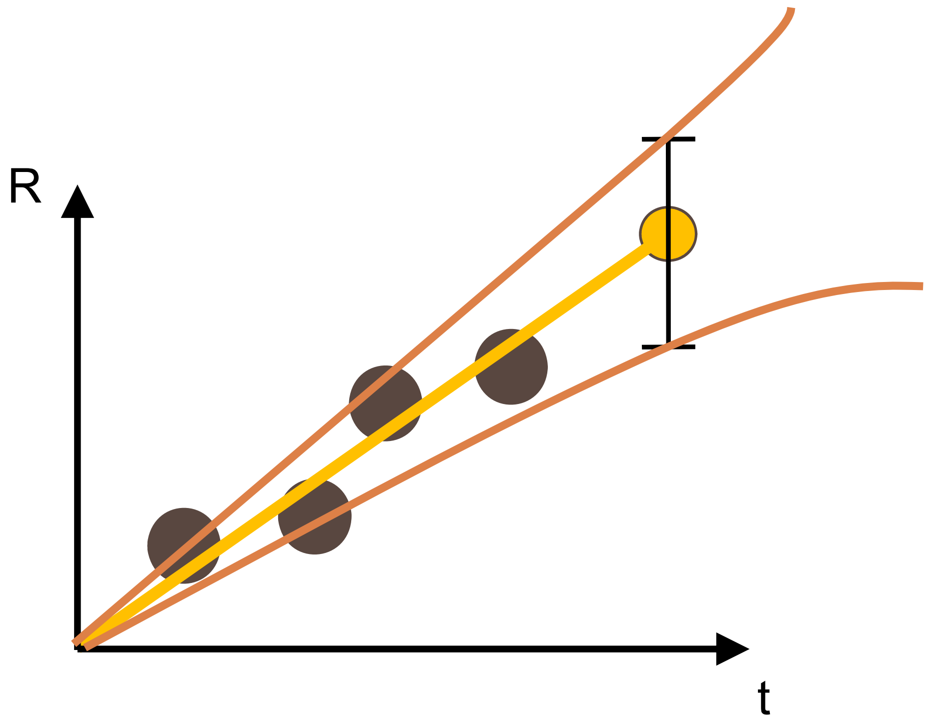
$$\sigma_{\mathrm{B}}^2 = \frac{\sigma_R^2 \cdot N}{\Delta_{\mathrm{li}}}$$

Δ_{li} - Determinante der Koeffizientenmatrix

Unsicherheiten der linearen Regression

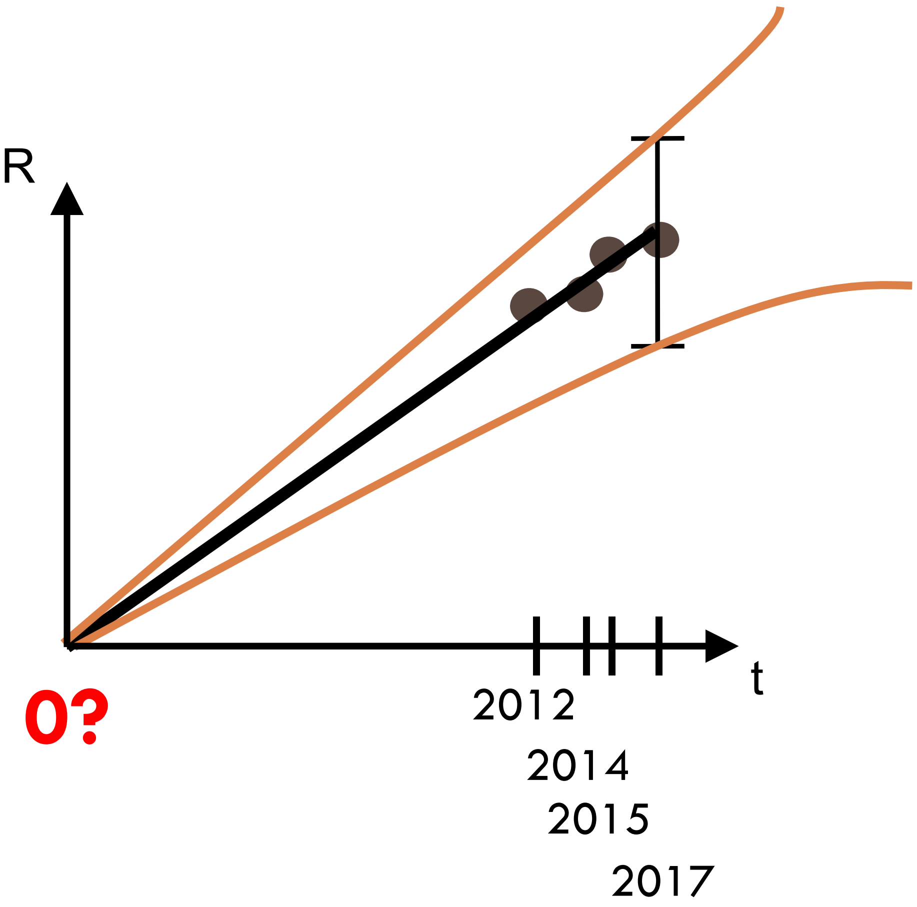
- Standardunsicherheit

$$u(\hat{R}) = \sqrt{\sigma_{\mathrm{R}}^2 + \sigma_{\mathrm{A}}^2 + \sigma_{\mathrm{B}}^2}$$



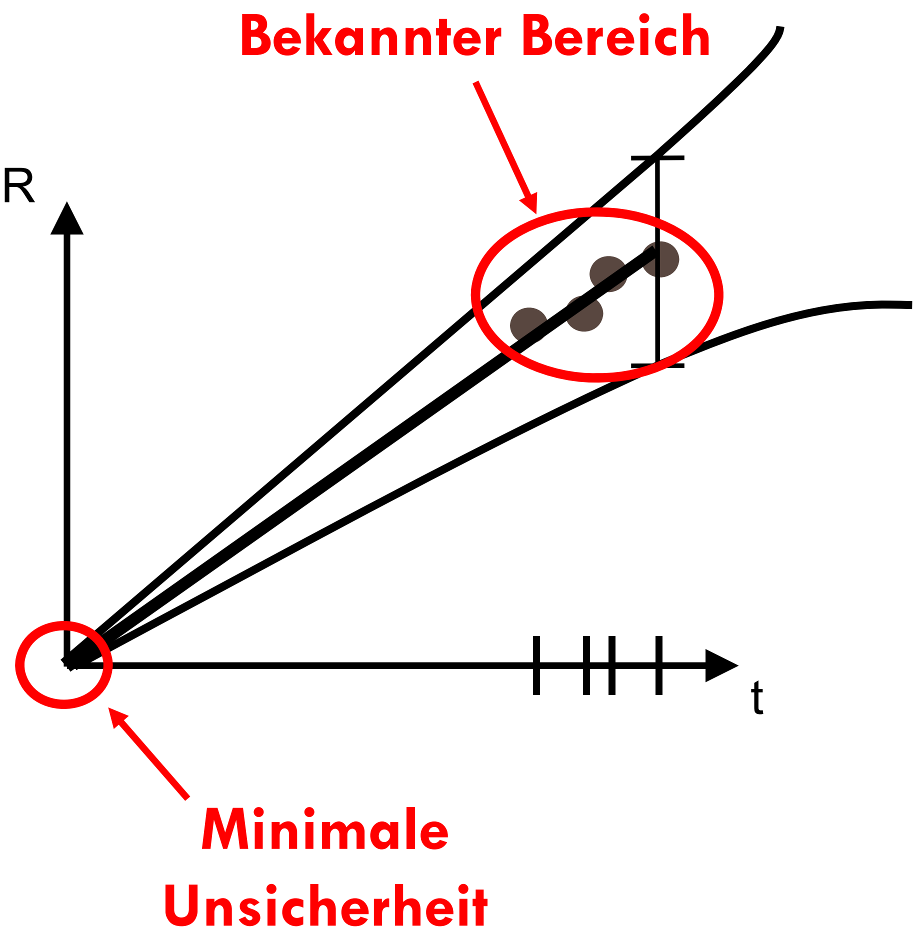
Unsicherheiten der linearen Regression

- **Problem:**
  - Umwandlung von Datum in Zahlen
  - Ursprung **beliebig**
  - Größenordnung 10^4 bis $\mathbf{10^{18}}$
- **Literatur nicht eindeutig**



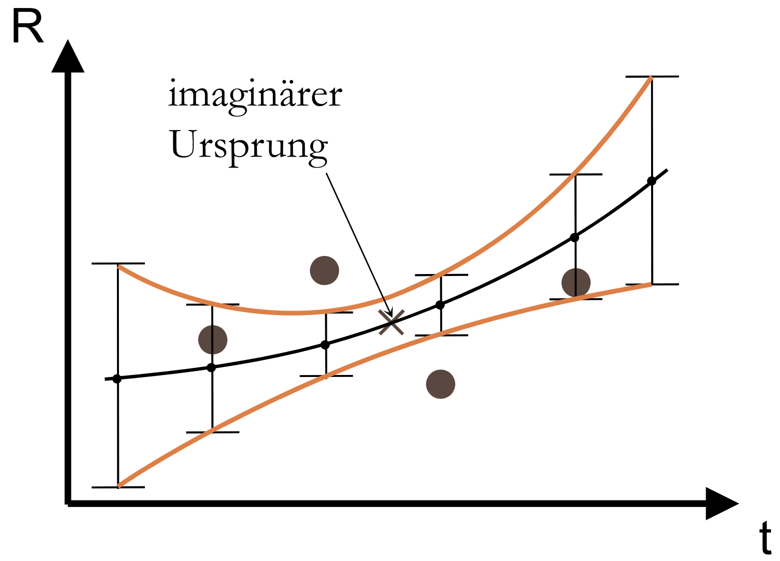
Unsicherheiten der linearen Regression

- **Problem:**
  - Umwandlung von Datum in Zahlen
  - Ursprung **beliebig**
  - Größenordnung 10^4 bis $\mathbf{10^{18}}$
- **Literatur nicht eindeutig**



Unsicherheiten der linearen Regression

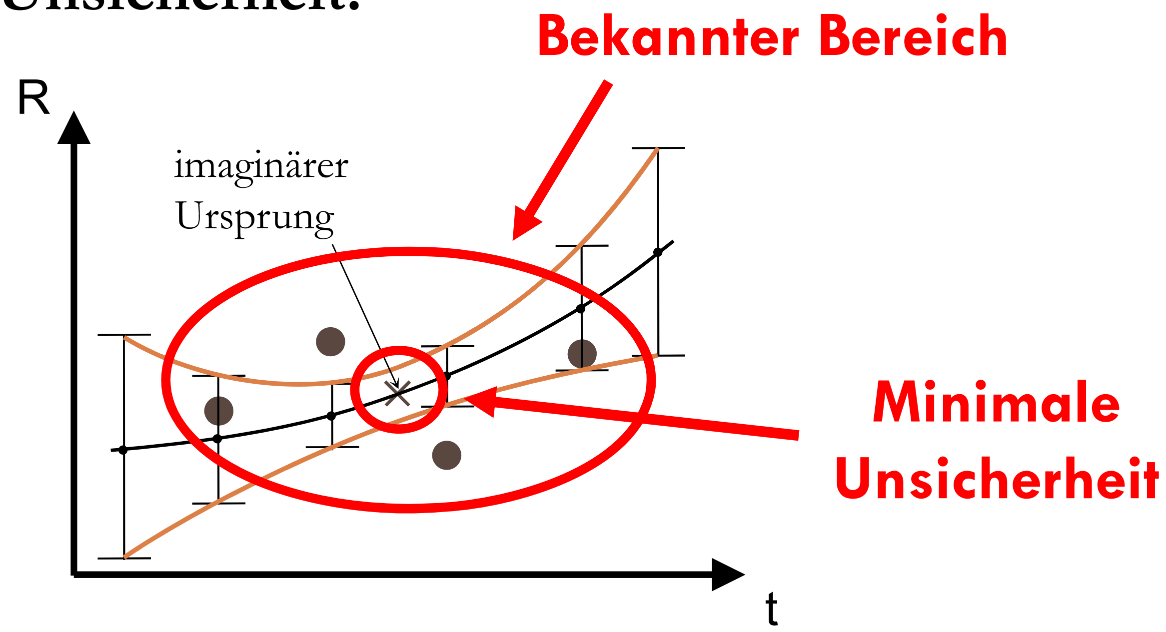
- **Zeitbezug der Unsicherheit:**



- **Mittelwertbildung** bei Berechnung
- **Imaginärer Ursprung = Mittelwert** aus Datumswerten

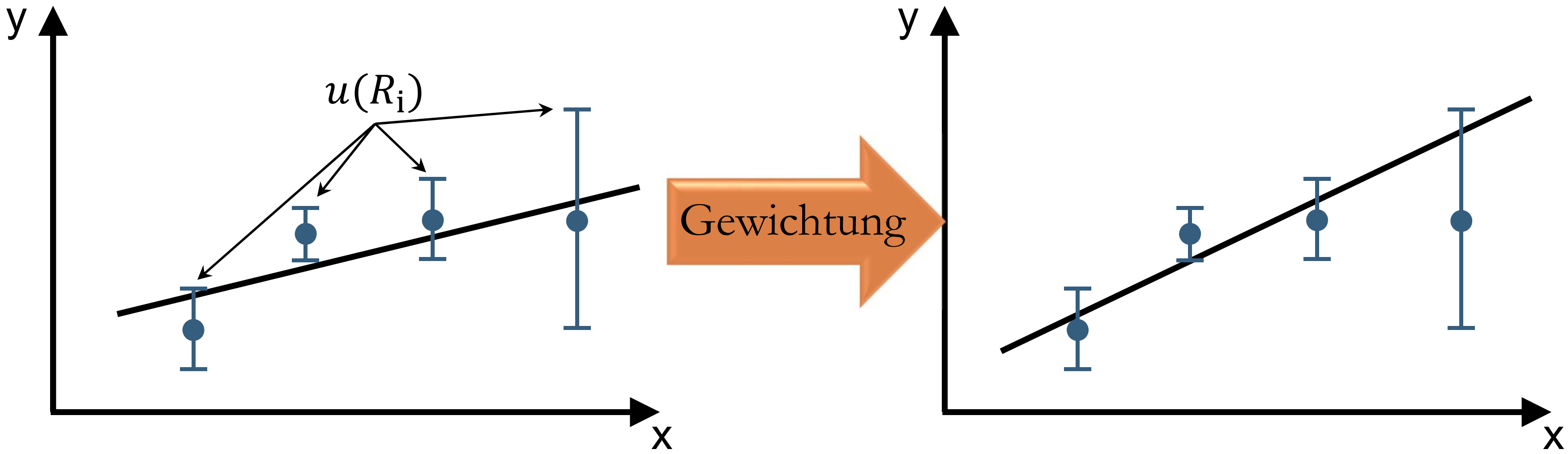
Unsicherheiten der linearen Regression

- **Zeitbezug der Unsicherheit:**



- **Mittelwertbildung** bei Berechnung
- **Imaginärer Ursprung = Mittelwert** aus Datumswerten

Gewichtung nach Unsicherheit



- Schwächere Wertung von Messwerten mit großer Unsicherheit
- Gewichtungsfaktor $w_i = \dfrac{1}{u(R_i)^2}$

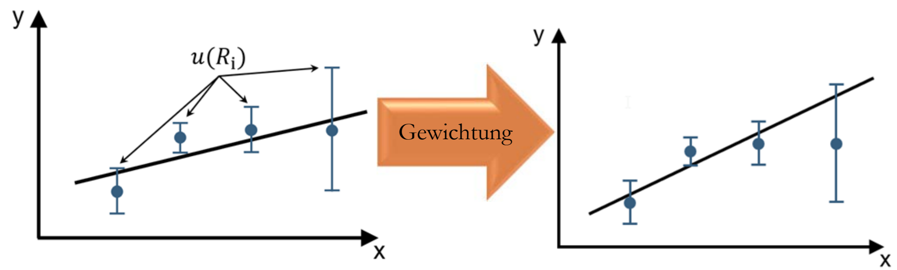
Gewichtung nach Unsicherheit

- **Beispiel lineare Regression**

$$A = \frac{\left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i} t_\mathrm{i}^2\right)\left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i} R_\mathrm{i}\right) - \left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i} t_\mathrm{i}\right)\left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i} t_\mathrm{i} R_\mathrm{i}\right)}{\left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i}\right)\left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i} t_\mathrm{i}^2\right)\left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i} t_\mathrm{i}\right)^2}$$

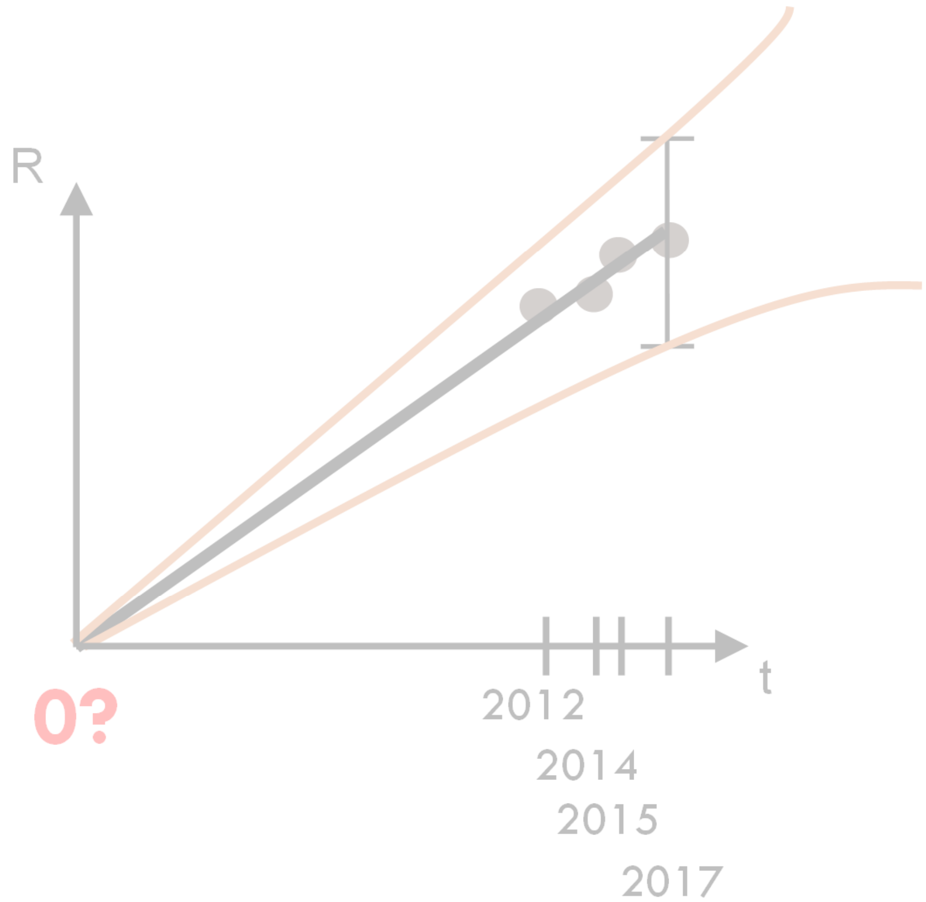
$$B = \frac{\left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i}\right)\left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i} t_\mathrm{i} R_\mathrm{i}\right) - \left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i} t_\mathrm{i}\right)\left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i} R_\mathrm{i}\right)}{\left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i}\right)\left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i} t_\mathrm{i}^2\right)\left(\sum \boldsymbol{w}_\mathbf{i} t_\mathrm{i}\right)^2}$$

- Schwächere Wertung von Messwerten mit großer Unsicherheit
- Gewichtungsfaktor $w_\mathrm{i} = \dfrac{1}{u(R_\mathrm{i})^2}$



Probleme

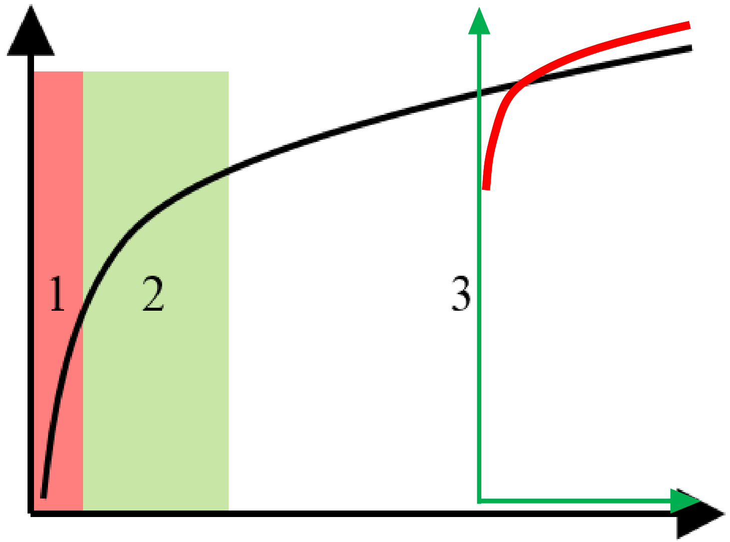
- **Problem:**
  - Umwandlung von Datum in Zahlen
  - Ursprung **beliebig**
  - Größenordnung 10^4 bis $\mathbf{10^{18}}$
- **Literatur nicht eindeutig**



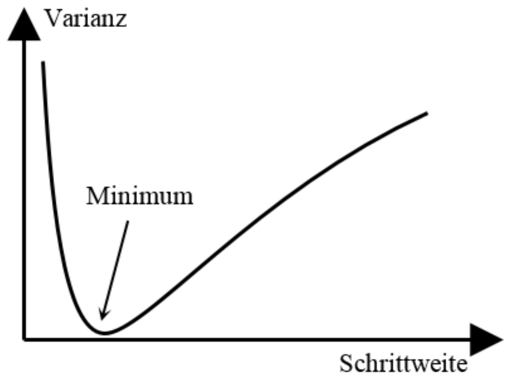
Regressionsberechnung

Probleme bei logarithmischem Ansatz

- Logarithmische Funktion
  - 1 – Steigung: hoch Krümmung: gering
  - 2 – Steigung: mittel Krümmung: stark
  - 3 – Steigung: gering Krümmung: gering

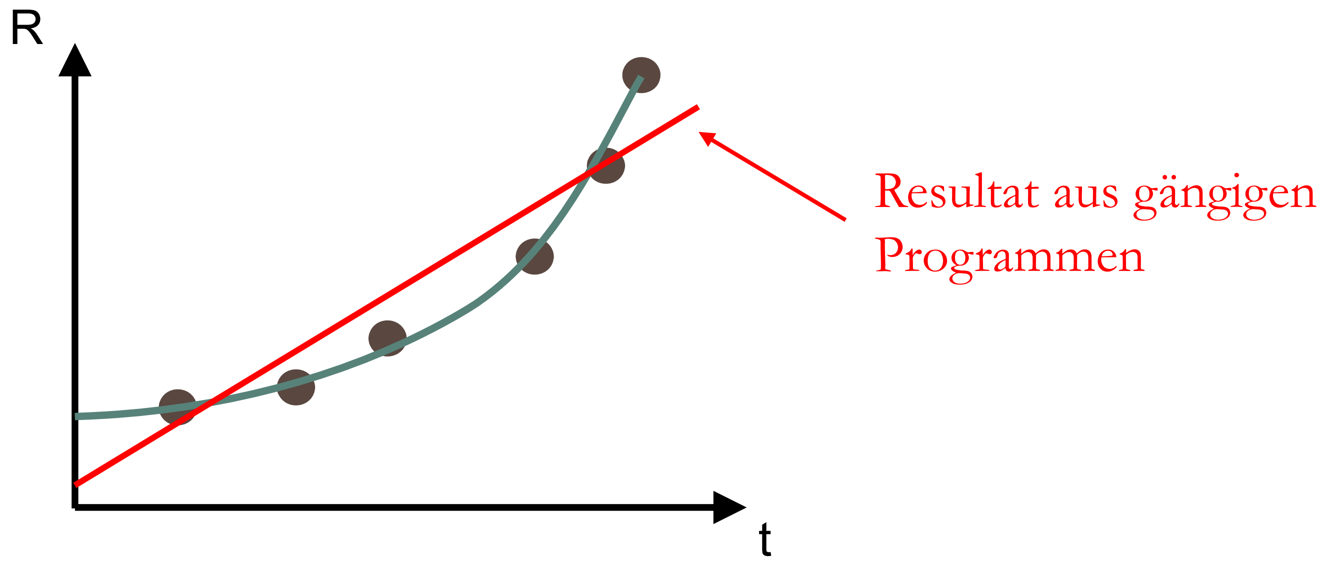


- $\ln(1) = 0$
- Kaum Unterschied zu linearer Regression
- Verschiebung des Ursprungs



Probleme bei exponentiellem Ansatz

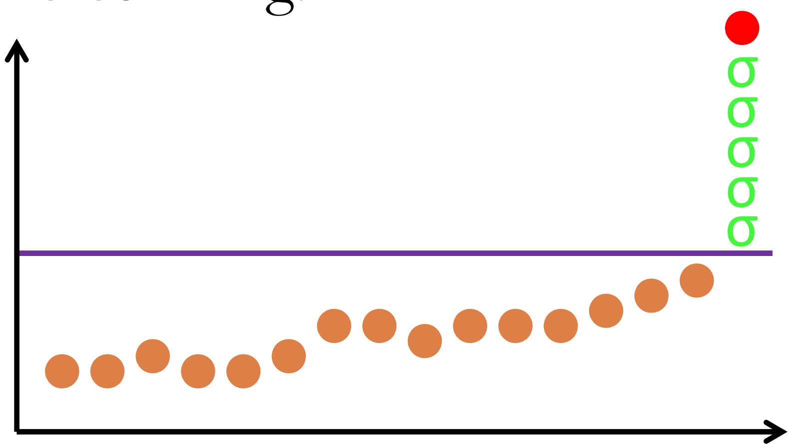
- Analog zur logarithmischen Berechnung
- Achsen vertauscht
  - Logarithmieren der Messwerte anstelle des Datums

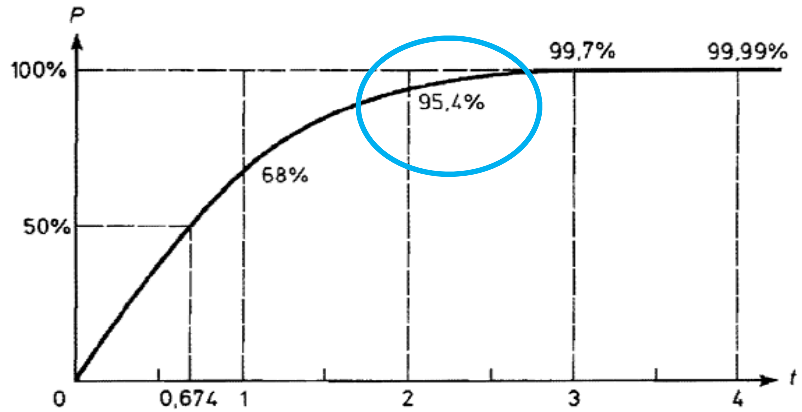


Behandlung von Ausreißern

Chauvenetsches Kriterium

- Darf man auffällige Werte vernachlässigen?
- Messungen können nicht wiederholt werden
- Berechnung:



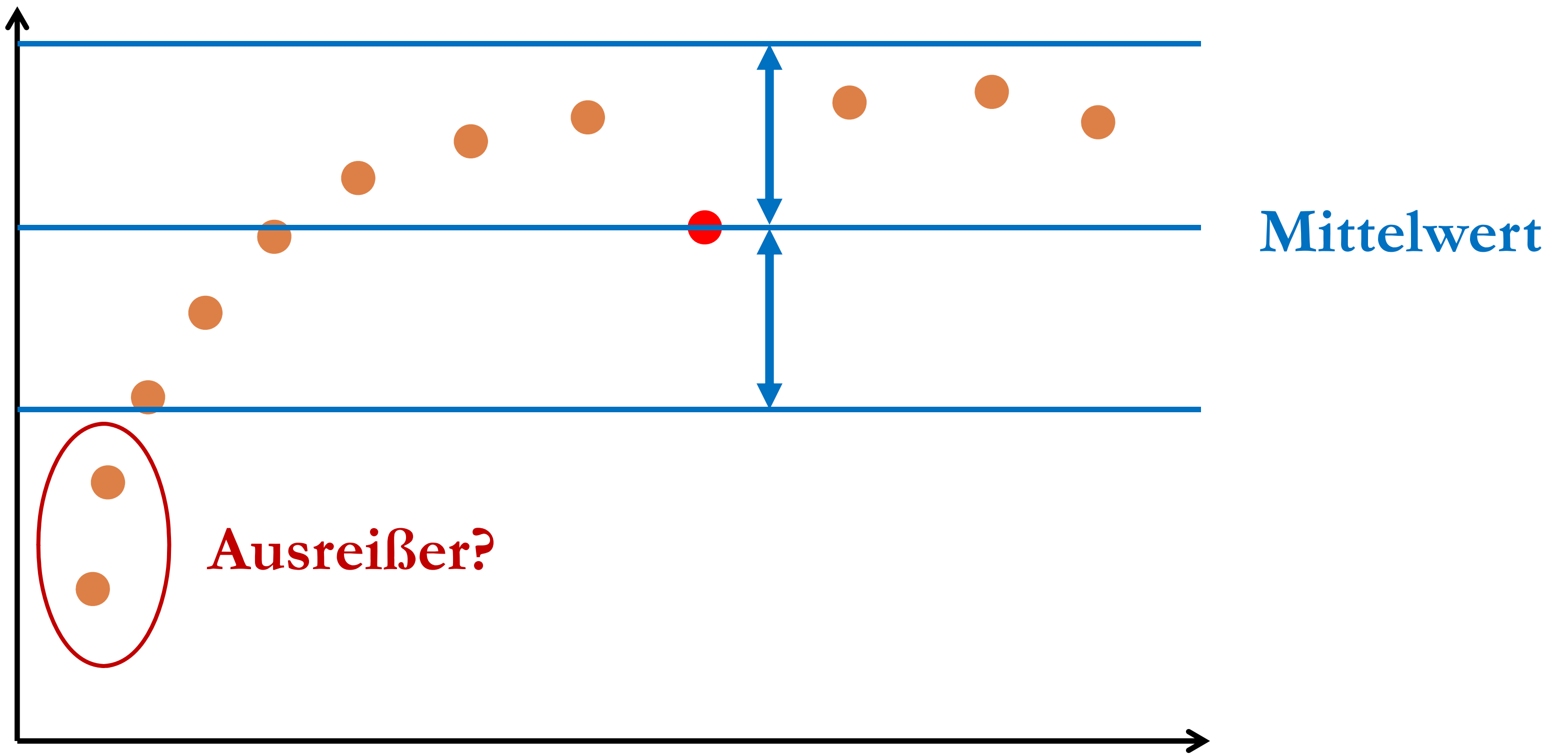


Wahrsch. * Messwerte = Chauv. K. **Ergebnis > 0,5 = OK**

- **Berechnung einmalig!**
- Mehrfache Berechnungen müssen verhindert werden!

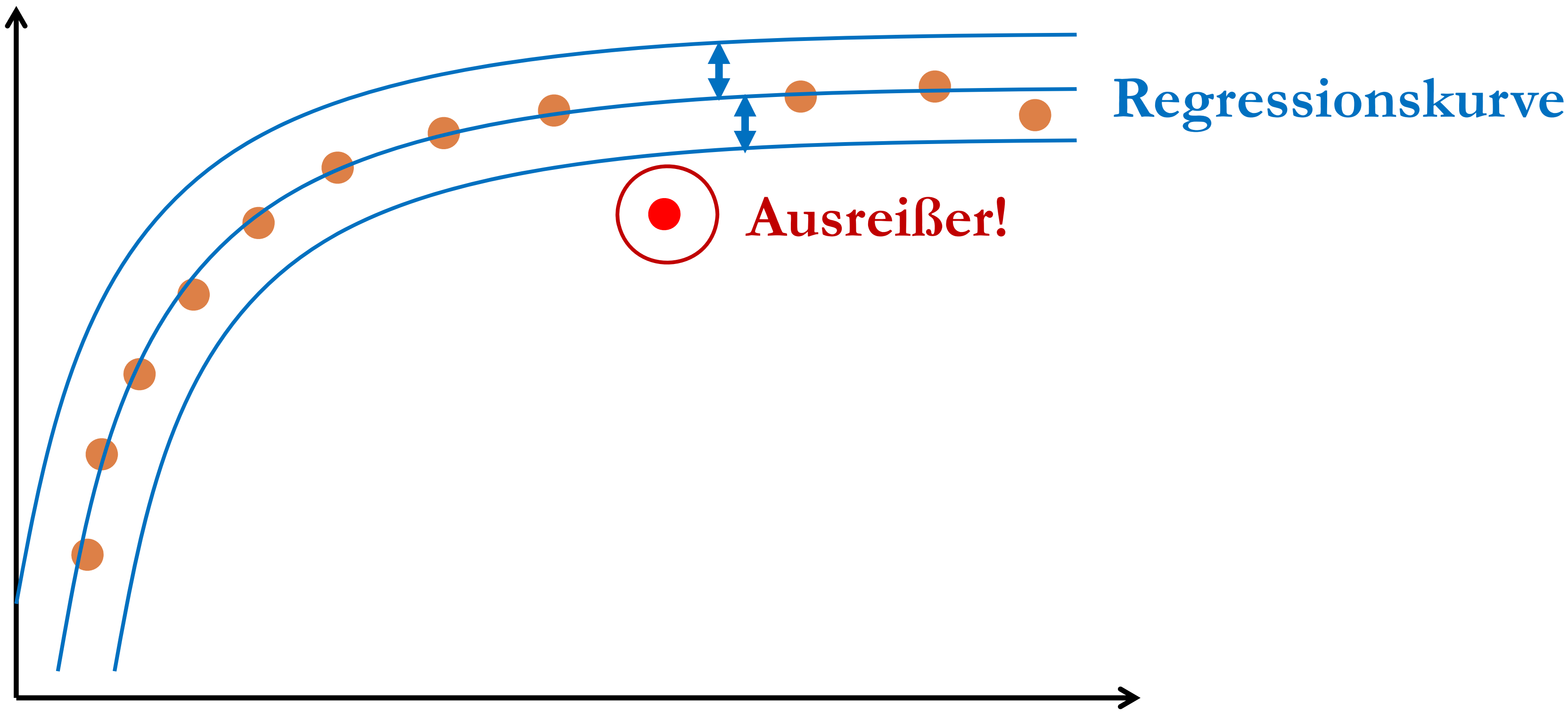
Chauvenetsches Kriterium

- Probleme durch Mittelwertbildung



Chauvenetsches Kriterium

- Probleme durch Mittelwertbildung



Softwareengineering

Test & Validierung

- Konstante Code-Reviews
- Tests mit Trainingsdaten
- Codeüberdeckung feststellen (C0)

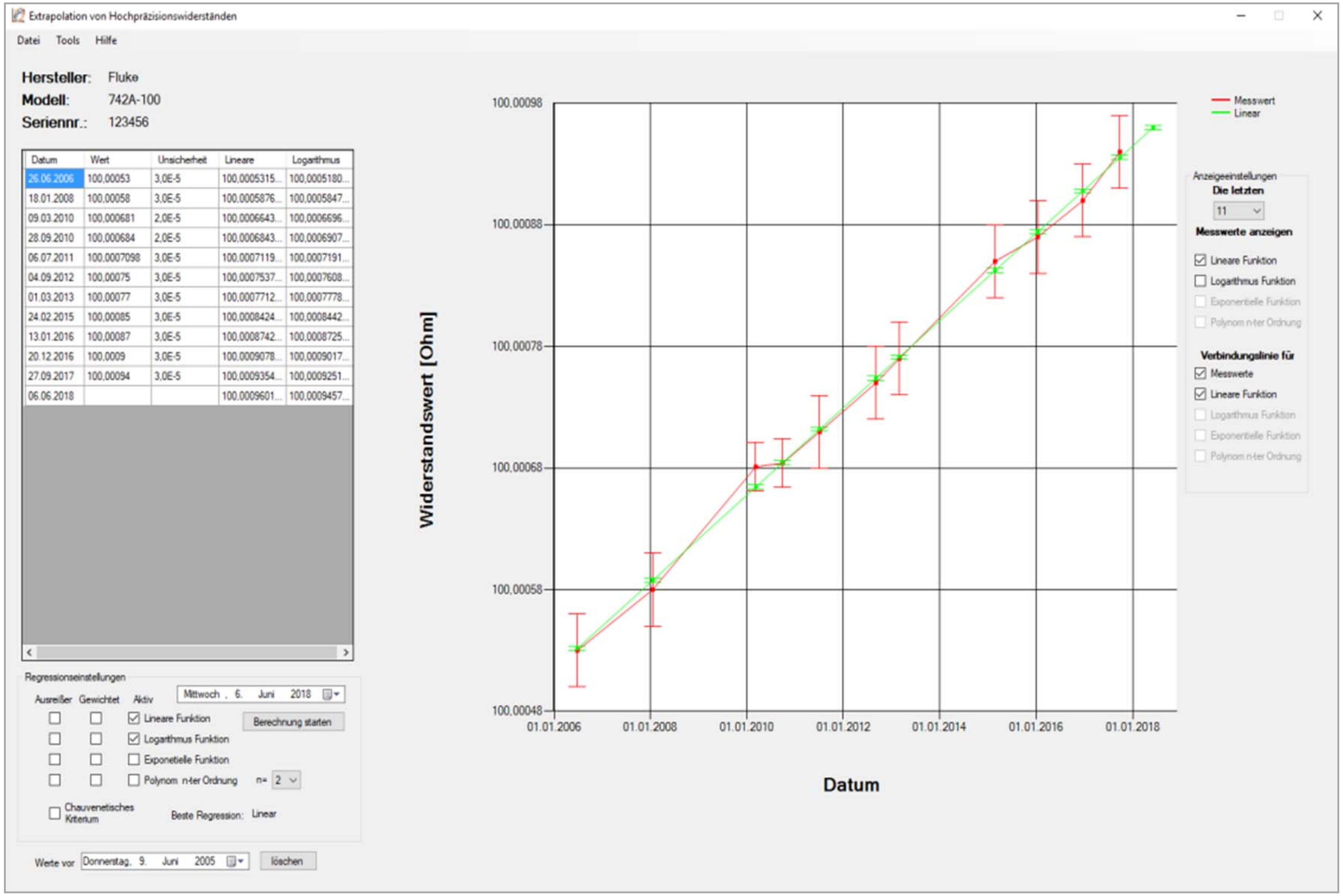
```
                delta = delta + 1
                'Untere Grenze
                minGerundet = (Math.Round(CDbl(CInt(maxGer
            Catch ex As Exception
            End Try
        End If
        Dim YAchsenBereichDbl As Double = (max - min)


        'Min/Max-Werte für Y-Achse schreiben
        If change_max Then
            Chart1.ChartAreas("ChartArea1").Axes(1).Maximu
        Else
            Chart1.ChartAreas("ChartArea1").Axes(1).Maximu
        End If
```

- Vergleichsrechnungen mit
  - Vorenthaltenen Messdaten
  - Vergleich mit Kalibrierungen
  - Betatest beim Kunden
- Übereinstimmung prüfen (E_N-Werte von ca. 0,1)

$$E_N = \frac{R_{Kalibrierung} - R_{Regression}}{\sqrt{U(R_{Kalibrierung})^2 + U(R_{Regression})^2}}$$

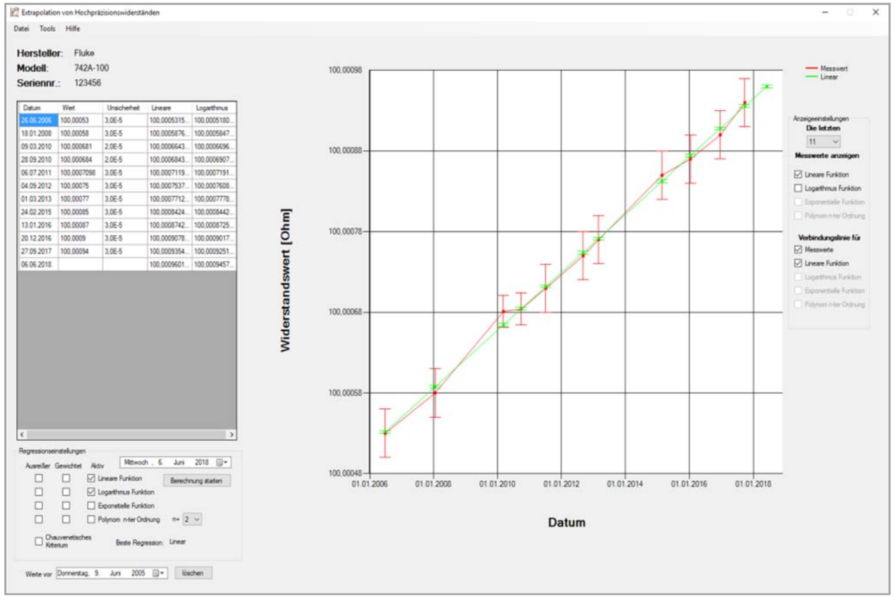
*my*RegressionLab



*my*MetrologyLab

*my*RegressionLab

- Features:
  - Regressionen
    - Linear
    - Polynom (bis 6. Ordnung)
    - Logarithmisch
    - Exponentiell
  - Chauvenetsches Kriterium
    - Traditionell
    - Regressionsbezogen
  - Gewichtung nach Unsicherheiten
  - Dokumentation der Extrapolation in XML-Datei
  - Verwendet .net Framework 4.5.2

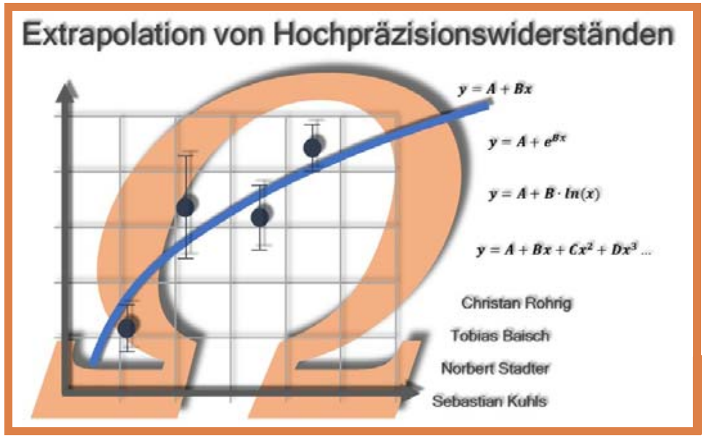


Besuchen sie uns unter www.mymetrologylab.de

Vielen Dank für Ihr Interesse!

Tobias Baisch, Sebastian Kuhls, Christian Rohrig, Norbert Stadter

Fragen?



h_da
HOCHSCHULE DARMSTADT
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
fbeit
FACHBEREICH ELEKTROTECHNIK
UND INFORMATIONSTECHNIK