

# Physikalisch- Technische Bundesanstalt



**DKD**

---

**Richtlinie  
DKD-R 5-6**


**Bestimmung von  
Thermometerkennlinien**

---

Ausgabe 09/2018

<https://doi.org/10.7795/550.20180828AG>



	Bestimmung von Thermometerkennlinien <a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	2/53

## Deutscher Kalibrierdienst (DKD)


Im DKD sind Kalibrierlaboratorien von Industrieunternehmen, Forschungsinstituten, technischen Behörden, Überwachungs- und Prüfinstitutionen seit der Gründung 1977 zusammengeschlossen. Am 03. Mai 2011 erfolgte die Neugründung des DKD als *technisches Gremium* der PTB und der akkreditierten Laboratorien.

Dieses Gremium trägt die Bezeichnung Deutscher Kalibrierdienst (DKD) und steht unter der Leitung der PTB. Die vom DKD erarbeiteten Richtlinien und Leitfäden stellen den Stand der Technik auf dem jeweiligen technischen Fachgebiet dar und stehen der Deutschen Akkreditierungsstelle GmbH (DAkkS) für die Akkreditierung von Kalibrierlaboratorien zur Verfügung.

Die akkreditierten Kalibrierlaboratorien werden von der DAkkS als Rechtsnachfolgerin des DKD akkreditiert und überwacht. Sie führen Kalibrierungen von Messgeräten und Maßverkörperungen für die bei der Akkreditierung festgelegten Messgrößen und Messbereiche durch. Die von ihnen ausgestellten Kalibrierscheine sind ein Nachweis für die Rückführung auf nationale Normale, wie sie von der Normenfamilie DIN EN ISO 9000 und der DIN EN ISO/IEC 17025 gefordert wird.

### Kontakt:

Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB)  
 DKD-Geschäftsstelle  
 Bundesallee 100      38116 Braunschweig  
 Postfach 33 45      38023 Braunschweig  
 Telefon Sekretariat: (05 31) 5 92-8021  
 Internet: [www.dkd.eu](http://www.dkd.eu)

	Bestimmung von Thermometerkennlinien <a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	3/53

*Zitiervorschlag für die Quellenangabe:*

*Richtlinie DKD-R 5-6, Bestimmung von Thermometerkennlinien, Ausgabe 09/2018, Revision 0, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig und Berlin.*

*DOI: <https://doi.org/10.7795/550.20180828AG>*


Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt und unterliegt der Creative Commons Nutzerlizenz CC by-nc-nd 3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>). In diesem Zusammenhang bedeutet „nicht-kommerziell“ (NC), dass das Werk nicht zum Zwecke der Einnahmenerzielung verbreitet oder öffentlich zugänglich gemacht werden darf. Eine Nutzung seiner Inhalte für die gewerbliche Verwendung in Laboratorien ist ausdrücklich erlaubt.



Autoren:

Mitglieder des Fachausschusses *Temperatur und Feuchte* des DKD in der Zeit von 2003 bis 2008.

Herausgegeben von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) für den Deutschen Kalibrierdienst (DKD) als Ergebnis der Zusammenarbeit der PTB mit dem Fachausschuss *Temperatur und Feuchte* des DKD.

	<p style="text-align: center;">Bestimmung von Thermometerkennlinien</p> <p style="text-align: center;"><a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a></p>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	4/53

## Vorwort

DKD-Richtlinien sind Anwendungsdokumente zu den Anforderungen der DIN EN ISO/IEC 17025. In den Richtlinien werden technische, verfahrensbedingte und organisatorische Abläufe beschrieben, die den akkreditierten Kalibrierlaboratorien als Vorbild zur Festlegung interner Verfahren und Regelungen dienen. DKD-Richtlinien können zum Bestandteil von Qualitätsmanagementhandbüchern der Kalibrierlaboratorien werden. Durch die Umsetzung der Richtlinien wird die Gleichbehandlung der zu kalibrierenden Geräte in den verschiedenen Kalibrierlaboratorien gefördert und die Kontinuität und Überprüfbarkeit der Arbeit der Kalibrierlaboratorien verbessert.

Die DKD-Richtlinien sollen nicht die Weiterentwicklung von Kalibrierverfahren und -abläufen behindern. Abweichungen von Richtlinien und neue Verfahren sind im Einvernehmen mit der Akkreditierungsstelle zulässig, wenn fachliche Gründe dafürsprechen.

Die vorliegende Richtlinie wurde vom Fachausschuss *Temperatur und Feuchte* in Zusammenarbeit mit der PTB und akkreditierten Kalibrierlaboratorien bereits 2008 erstellt.

Die vorliegende geänderte Neuauflage enthält lediglich ein aktualisiertes Impressum.

Sie ist inhaltsgleich mit der DAkkS-DKD-R 5-6 (Ausgabe 2010). Die DAkkS wird die DAkkS-DKD-R 5-6 spätestens zum 01.01.2021 zurückziehen.

Ausgabe: 2003, veröffentlicht vom DKD

1. Neuauflage 05/2008, durch den DKD
2. Neuauflage: 2010, durch die DAkkS
3. Neuauflage: 2018, durch den DKD, inhaltsgleich mit der 2. Neuauflage

## INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort.....	4
1 Zweck und Geltungsbereich .....	7
2 Grundlagen.....	7
2.1 Kennlinientypen (Allgemeines).....	8
2.2 Approximations- und Interpolationsverfahren (Allgemeines) .....	9
2.2.1 Interpolation .....	9
2.2.2 Approximation.....	11
2.3 Unsicherheiten der Kennlinie (Allgemeines).....	12
2.3.1 Unsicherheit bei Interpolationsfunktionen.....	13
2.3.2 Unsicherheit bei Approximationsfunktionen .....	13
2.4 Wahl der Stützstellen sowie des Kennlinientypes (Allgemeines).....	15
2.5 Softwareauswahl / Validierung.....	16
2.6 Kalibrierschein .....	17
3 Platinwiderstandsthermometer .....	18
3.1 Typen der Approximationsgleichungen .....	18
3.1.1 Callendar-van-Dusen-Gleichung .....	18
3.1.2 Standard-Polynom .....	18
3.1.3 Abweichungspolynom .....	18
3.2 Verwenden der Messwerte .....	19
3.2.1 $R_0$ -Wert.....	19
3.2.2 $W$ -Wert Bildung.....	20
3.2.3 Wichtungsfaktoren .....	20
3.3 Anordnung der Stützstellen.....	21
3.4 Anzahl der Stützstellen .....	21
3.4.1 Gewöhnlich bekannte Thermometertypen (Normalfall) .....	21
3.4.2 Genau untersuchte Thermometertypen (Sonderfall) .....	21
3.4.3 Bekannte Thermometerexemplare (Rekalibrierung).....	22
3.4.4 Temperaturen unter 0 °C .....	23
3.4.5 Hohe Temperaturen.....	23
3.5 Ermittlung einer geeigneten Kennlinienbeschreibung.....	24
3.6 Rechenverfahren .....	24
3.6.1 Test des Rechenverfahrens .....	24
4 Thermoelemente .....	25
4.1 Typen der Approximationsgleichungen .....	25
4.1.1 Standard-Polynom .....	25
4.1.2 Abweichungspolynom .....	25
4.2 Verwenden der Messwerte .....	25
4.2.1 Wichtungsfaktoren .....	25
4.3 Anordnung der Stützstellen.....	25
4.3.1 Extrapolation der Messergebnisse .....	26
4.4 Anzahl der Stützstellen .....	26
4.5 Ermittlung einer geeigneten Kennlinienbeschreibung.....	27
4.6 Rechenverfahren .....	27
4.6.1 Test des Rechenverfahrens .....	27
5 Sonstige Thermometer .....	28
5.1 Thermistoren .....	28
5.2 Flüssigkeitsglasthermometer .....	31
5.3 Direktanzeigende elektronische Thermometer .....	31
6 Anhang.....	32

6.1	Empfohlene Approximationsgleichungen .....	32
6.1.1	Empfohlene Approximationsgleichungen für Pt-100.....	33
6.1.2	Empfohlene Approximationsgleichungen für Thermoelemente .....	35
6.2	Testdatensätze .....	36
6.2.1	Testdatensatz für Pt-100.....	36
6.2.2	Testdatensatz für Thermoelemente .....	45
6.2.3	Testdatensatz für Thermistoren .....	46
6.3	Mathematische Hilfsmittel .....	49
6.3.1	Algorithmus für eine Polynom-Approximation .....	49
6.3.2	Algorithmus für die Callendar-van-Dusen-Approximation.....	49
7	Literatur .....	52

## 1 Zweck und Geltungsbereich

Zweck dieser Richtlinie ist, für die Approximation der Kennlinien von industriell genutzten Thermometern allgemein gültige Verfahren festzulegen, um damit für die Prüfmittelüberwachung eine einheitliche überbetriebliche Basis zu schaffen. Ebenso sollen dem Nutzer dieser Richtlinie – dem Kalibrierlabor wie auch dem Anwender des Thermometers – Hinweise sowohl zur Handhabung von Approximationsgleichungen, wie auch zur Durchführung der eigentlichen Approximation gegeben werden.

Diese Richtlinie gilt prinzipiell für alle Thermometer. Sie ist jedoch speziell auf die Anforderungen von Platinwiderstandsthermometern (insbesondere Pt-100), Thermoelementen und Thermistoren zugeschnitten. Da diese, je nach Sensortyp und Temperaturbereich, sehr unterschiedliche Messunsicherheiten aufweisen, ist auch diese Richtlinie für verschiedene Anforderungen an die Messunsicherheit ausgelegt.

Bei einigen Thermometertypen (z.B. Thermometer mit elektronischer Anzeige oder Flüssigkeitsglasthermometer) gibt es prinzipielle Probleme bei der Ermittlung einer Kennlinie. Hierfür ist diese Richtlinie nicht anwendbar.

Ziel dieser Richtlinie ist es nicht neue oder bessere Approximationsverfahren oder Kennlinientypen zu entwickeln bzw. vorzuschreiben als die zzt. üblicherweise gebrauchten.

Vielmehr sollen für gegebene Randbedingungen, wie Temperaturbereich und geforderter Messunsicherheit der oder die optimale(n) Kennlinientyp(en) vorgeschlagen werden, welche heute Stand der Technik sind. Diese Empfehlungen sind so auch mit existierender Software und existierenden Messgeräten kompatibel und lassen sich dort problemlos eingeben bzw. integrieren.

Möglicherweise gibt es andere Kennlinientypen, die ebenfalls gut oder sogar besser geeignet sind, als die hier beschriebenen. Im Falle einer geringen Verbreitung oder schlechten Handhabbarkeit sollten andere mathematischen Beschreibungen für Kennlinien nur in begründeten Fällen Anwendung finden.

## 2 Grundlagen

Thermometer für industrielle Anwendungen (z.B. Platinwiderstandsthermometer / Pt-100, Thermoelemente, Thermistoren) werden in der Regel in einem, vom Anwender gewünschten, Temperaturbereich an mehreren Temperaturpunkten kalibriert. Verwendet wird das Thermometer üblicherweise nicht exakt an den Kalibrierpunkten, sondern auch dazwischen. Häufig wird deshalb vom Anwender eine kontinuierliche Beschreibung des Zusammenhangs von Temperatur und Widerstand bzw. Temperatur und Thermospannung über den kompletten genutzten Temperaturbereich gefordert.

In den meisten Fällen wird dies durch Angabe einer mathematischen Gleichung erreicht, die durch Approximation der gemessenen Temperaturpunkte ermittelt wird.

Wie und unter welchen Randbedingungen eine solche Approximationsrechnung durchgeführt werden sollte, wird in dieser Richtlinie beschrieben.

## 2.1 Kennlinientypen (Allgemeines)

Das Ziel der Bestimmung einer Thermometerkennlinie besteht generell darin, aus einer kleinen Anzahl von Kalibrierpunkten  $(T_i; Y_i = f(T_i))$  einen mathematisch (meist analytisch) formulierten Zusammenhang  $Y = f(T)$  abzuleiten, der dann im gesamten erfassten Mess- / Kalibrierbereich zur Bestimmung der Temperatur  $T$  aus der gemessenen Größe  $Y$  genutzt werden kann.

Dabei stellt sich besonders im Bereich der Thermometerkennlinien die Forderung, nichtlineare Sensorkennlinien aus einer häufig sehr kleinen Anzahl von Messpunkten so zu bestimmen, dass die Unsicherheit im gesamten interessierenden Bereich nicht deutlich größer als die Unsicherheit der Stützstellen (Messwerte) ist.

Die Wahl des Ansatzes für die Kennlinienfunktionen wird von einer Reihe von Faktoren beeinflusst:

- Vorliegen physikalisch begründeter Kennlinienfunktionen
- Technisch, historisch oder normativ gebräuchlich definierte Ansätze
- Von der verwendeten Soft- und Hardware unterstützte Ansätze
- Anzahl der vorhandenen Kalibrierpunkte
- Geforderte Messunsicherheiten
- Temperaturbereich

Grundsätzlich ist beim Anpassen von Modellfunktionen stets die Verträglichkeit von Daten und Modell zu prüfen, z.B. mittels des  $\chi^2$ -Kriteriums. Aufgrund jahrzehntelanger Erfahrungen mit Thermometerkennlinien, insbesondere mit den Kennlinien von industriellen Widerstandsthermometern, kann jedoch in der Regel davon ausgegangen werden, dass für die nachfolgend behandelten Modellfunktionen die Verträglichkeit mit den Messdaten im Rahmen der in Abschnitt 6 genannten Unsicherheiten gegeben ist, sofern kein Messfehler unterlaufen ist.

Die Palette der verfügbaren bzw. gebräuchlichen Funktionen für die Beschreibung des individuellen Verhaltens von Temperatursensoren lässt sich prinzipiell einteilen in:

### 1) Individuallinien $Y(T)$ mit thermometertypischem Ansatz

Beispiel: Callendar-van-Dusen Gleichung für Pt-Widerstandsthermometer (DIN EN 60751)

$$Y(T) = R(T) = R_0 \cdot \left[ 1 + A \cdot T + B \cdot T^2 + C \cdot T^3 \cdot (T - 100 \text{ °C}) \right] \quad \text{mit } C = 0 \quad \text{für } T > 0 \text{ °C}$$

### 2) Individuallinien $Y(T)$ mit allgemeinem Ansatz

Beispiel: Polynom für die Kennlinie eines Thermoelementes


$$Y(T) = U_{\text{Th}}(T) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot T^i$$

### 3) Abweichungsfunktionen zu Normkennlinien $Y_N(T)$ als Funktion der Temperatur

Beispiel: Abweichung der Thermospannung  $U_i(T_i)$  eines Thermoelementes von den (Norm-) Grundwerten  $U_N(T_i)$  als Funktion der Temperatur. Bei Pt-PtRh-Thermoelementen sind hierfür in einem weiten Temperaturbereich Polynome 2. Ordnung gebräuchlich.

$$\Delta U(T) = U_i(T) - U_N(T) = a_0 + a_1 \cdot T + a_2 \cdot T^2$$



	Bestimmung von	DKD-R 5-6	
	Thermometerkennlinien	Ausgabe:	09/2018
	<a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	Revision:	0
		Seite:	9/53

#### 4) Abweichungsfunktionen zu Normkennlinien $Y_N(T)$ als Funktion der Anzeigegröße

##### Beispiel:

Die Kalibrierung von Standard-Pt-Widerstandsthermometern gemäß ITS-90 an Fixpunkten gibt für das Widerstandsverhältnis  $W(T_{90})$  Abweichungsfunktionen  $\Delta W = \Delta W(T_{90}) = W(T_{90}) - W_r(T_{90})$  zur Referenzkennlinie  $W_r(T_{90})$  an. Dabei sind für  $\Delta W(T_{90})$  je nach Temperaturbereich unterschiedliche Ansätze  $\Delta W = f(W)$  bzw.  $\Delta W(T_{90}) - f(W(T_{90}))$  in Form von Polynomen bis maximal 3. Ordnung in  $W$  (für  $-38,8344 \text{ °C} \leq T \leq 961,78 \text{ °C}$ ) bzw. mit einem zusätzlichen Term in  $\ln(W)$  (für  $-189,3442 \text{ °C} \leq T \leq 0,01 \text{ °C}$ ) definiert [18].

Fast alle gebräuchlichen Kennlinienansätze erlauben keine direkt interpretierbaren Aussagen über spezielle Thermometerkenndaten, deren Änderungen oder Driften. Eine Ausnahme hierbei stellt die Callendar-van-Dusen-Gleichung (DIN EN 60751) dar, bei der  $R_0$  direkt den Widerstand am Eispunkt  $0 \text{ °C}$  und  $A$  den Anstieg am Eispunkt als Maß für die Güte des verwendeten Pt-Widerstandsdrahtes angibt.

Kennlinien der Form  $Y(T) = f(T)$  enthalten die komplette individuelle Sensorbeschreibung und müssen daher (meist mit wenigen Koeffizienten) sowohl die sensortypspezifische Nichtlinearität als auch die individuelle Abweichung des Sensorverhaltens vom typischen bzw. normierten Verlauf beschreiben. Abweichungsfunktionen hingegen brauchen nur dieses individuelle Abweichen von der Norm zu beschreiben. Sie erzielen daher mit einfacheren Ansätzen und damit weniger zu bestimmenden Koeffizienten eine deutlich bessere Beschreibung des Sensorverhaltens (dies kommt der häufigen Forderung nach einer geringen Kalibrierpunktanzahl sehr entgegen). Die mit solchen Abweichungsfunktionen berechneten Werte entsprechen in ihrer Größe und Bedeutung den normalerweise in Kalibrierergebnissen angegebenen Korrekturen der vom Kalibriergegenstand gelieferten Messwerte.

Besonders einfach und universell geeignet sind Kennlinien, die als Kalibrierergebnis die Werte einer Referenzkennlinie  $Y_R(T)$  bzw. die zugeordneten Abweichungen der Anzeige des Kalibriergegenstandes zu einer Referenzkennlinie  $\Delta Y = Y_i - Y_R$  nicht als Funktion der Temperatur, sondern als Funktion des Anzeigewertes selbst angeben  $\Delta Y = f(Y)$  bzw.  $Y_R = f(Y)$ . Hierbei werden dann nur Größen gleicher physikalischer Dimension verknüpft. Das sensortypische Verhalten braucht nicht speziell berücksichtigt zu werden (oder gar bekannt zu sein), da es bereits mit der Festlegung von  $Y_R(T)$  vollständig erfasst ist.

Ein Sonderfall dieses Ansatzes sind Kennlinien für direktanzeigende Thermometer, die die Korrektur oder die „richtige Temperatur“ als Funktion der angezeigten Temperatur beschreiben.

## 2.2 Approximations- und Interpolationsverfahren (Allgemeines)

Ein gewählter bzw. festgelegter Kennlinienansatz kann als Approximationsfunktion oder als Interpolationsfunktion an das jeweilige Kalibrierergebnis angepasst werden. Hierbei sind die prinzipiellen Unterschiede der Funktionsarten zu beachten:

### 2.2.1 Interpolation

Eine Interpolationsfunktion reproduziert direkt alle als Stützstellen verwendeten Kalibrierwerte. Unsicherheiten der einzelnen Kalibrierpunkte gehen direkt und vollständig sowohl global (d.h. der Kennlinienverlauf wird im gesamten Bereich von jedem Kalibrierpunkt beeinflusst) als auch lokal (d.h. jeder Kalibrierpunkt beeinflusst besonders den Kennlinienverlauf in den unmittelbar angrenzenden Wertebereichen) in die bestimmte Kennlinie ein. Dieses Verhalten ist besonders problematisch mit zunehmender Nichtlinearität des Kennlinienansatzes bei Interpolationsfunktionen mit globalem, d.h. für den gesamten Kalibrierbereich gegebenen Ansatz.

Die Interpolation mit Globalansätzen erfolgt meist mit Polynomen, die letztlich auf Interpolationspolynome vom Lagrangeschen Typ zurückgeführt werden können.

$$Y(T) = \sum_{i=0}^N Y_i(T_i) \cdot L_i(T)$$

mit

$$L_k(T) = \prod_{i=0; i \neq k}^N \frac{T - T_i}{T_k - T_i}$$

$$= \frac{(T - T_0) \cdot (T - T_1) \cdot \dots \cdot (T - T_{k-1}) \cdot (T - T_{k+1}) \cdot \dots \cdot (T - T_{N-1}) \cdot (T - T_N)}{(T_k - T_0) \cdot (T_k - T_1) \cdot \dots \cdot (T_k - T_{k-1}) \cdot (T_k - T_{k+1}) \cdot \dots \cdot (T_k - T_{N-1}) \cdot (T_k - T_N)}$$

Bei einer größeren Anzahl von Kalibrierpunkten entstehen so Polynome hohen Grades. Die bestimmten Koeffizienten werden direkt von der Wahl der Kalibrierpunkte beeinflusst. Eine Vergleichbarkeit von Kennlinien (auch des gleichen Sensors zu früher bereits bestimmten) ist daher nicht gegeben. Mit zunehmendem Polynomgrad (große Kalibrierpunktanzahl) steigt die Instabilität des Funktionsverlaufes zwischen den Stützstellen gegenüber kleinen Abweichungen bei den Stützstellen. Eine obere sinnvolle Grenze für solche globalen Interpolationspolynome liegt daher bei ca. 5 Kalibrierpunkten.

Interpolationsfunktionen eignen sich bei gut definierten Kalibrierpunkten bzw. Punkten mit sehr kleiner Unsicherheit (z.B. Fixpunktkalibrierungen) und/oder Kennlinien mit sehr geringer Nicht-linearität (Abweichungsfunktionen gegen Referenzkennlinien oder direktanzeigende Thermometer) und daher nur wenigen erforderlichen Kalibrierpunkten. Die Kennlinien von Pt-Widerstandsthermometern nach ITS-90 erfüllen alle diese Voraussetzungen gleichzeitig und sind daher zur einfachen Beschreibung der Individualität von Thermometern mit kleinsten Unsicherheiten geeignet.

Interpolationsverfahren eignen sich auch für die stückweise Bestimmung von Kennlinien für die Intervalle zwischen benachbarten Kalibrierpunkten. Hierbei können die Probleme globaler Ansätze (Schwingneigung aufgrund hoher Ordnung der Funktionen) vermieden werden. Die Auswirkungen eines einzelnen Kalibrierpunktes auf den Kurvenverlauf sind auf benachbarte Stützstellenintervalle beschränkt (nur lokale Auswirkungen). Praktisch ist insbesondere die stückweise lineare Interpolation (Polygonzug) und die Interpolation mit kubischen Splinefunktionen von Interesse, die aber kein rein lokales Verfahren ist.

### Polygoninterpolation:

Aus den  $N$  Kalibrierpunkten  $Y_i = Y_i(T_i)$  mit  $i = 0 \dots N-1$  werden die  $N-1$  stückweise linearen Funktionen

$$Y_k(T) = \frac{(T_{k+1} - T) \cdot Y_k + (T - T_k) \cdot Y_{k+1}}{T_{k+1} - T_k} \quad \text{für } T_k \leq T \leq T_{k+1} \quad \text{mit } k = 0 \dots N-2$$

berechnet.

Anmerkung: Hier handelt es sich nicht um eine rekursive Darstellung. Gemäß der in der Einleitung gewählten Nomenklatur ist  $Y(T)$  die Funktion für den gesamten Bereich  $T_0 \leq T \leq T_{N-1}$ .  $Y_k(T)$  sind die stückweisen Funktionen und  $Y_k$  bzw.  $Y_k(T_k)$  sind die Stützstellen (Messwerte).

### Spline-Interpolation:

Aus den  $N$  Kalibrierpunkten  $Y_i = Y_i(T_i)$  mit  $i = 0 \dots N-1$  werden die  $N-1$  stückweise definierten kubischen Funktionen

$$Y_k(T) = a_{0k} + a_{1k} \cdot (T - T_k) + a_{2k} \cdot (T - T_k)^2 + a_{3k} \cdot (T - T_k)^3 \quad \text{für } T_k \leq T \leq T_{k+1} \quad \text{mit } k = 0 \dots N-2$$

berechnet. Die Koeffizienten  $a_{0k}; a_{1k}; a_{2k}; a_{3k}$  ( $k = 0 \dots N-2$ ) werden dann aus einem Gleichungssystem, welches aus den Stetigkeitsforderungen der Funktionen inkl. der 1. und 2. Ableitungen an den Stützstellen resultiert, berechnet.

Anmerkung: Die Splineinterpolation ist mathematisch gesehen viel eher ein lokales als ein globales Verfahren. Je nach der Schärfe der gewählten zu erfüllenden Stetigkeitsbedingungen beeinflussen noch der zweite bis maximal der dritte Nachbarpunkt die Koeffizienten im aktuellen Intervall. Alle weiter entfernten Punkte haben keinen Einfluss.

**Achtung:** Einige Standardsoftware zur Spline-Interpolation setzt äquidistante Stützstellen voraus!

### 2.2.2 Approximation


Bei Approximationsverfahren und den mit den zugehörigen Ansätzen bestimmten Kennlinien ist die Anzahl  $m$  der freien Parameter stets kleiner als die Anzahl  $N$  der zur Kennlinienbestimmung verwendeten Kalibrierpunkte. Daher reproduziert die Approximationsfunktion die Kalibrierwerte im Regelfall nicht exakt, d.h. es verbleibt eine von Null verschiedene Abweichung zwischen den Funktionswerten an den Kalibriertemperaturen und den gemessenen Kalibrierwerten. In vielen praktischen Fällen wird der Funktionsverlauf andererseits von kleinen Unsicherheiten einzelner Stützstellen nicht mehr wesentlich beeinflusst. Dies gilt umso mehr, je größer die Stützstellenanzahl  $N$  im Verhältnis zur freien Parameteranzahl  $m$  ist, und ergibt sich aus den statistischen Eigenschaften des Bestimmungsverfahrens.

Die Approximation beruht grundsätzlich darauf, dass auf der Basis eines gewählten Maßes die Abweichungen zwischen den Messwerten  $Y_i(T_i)$  und einem parameterabhängigen Funktionsansatz  $f(T_i, a_1, a_2, \dots, a_m)$  durch geeignete Variation der Parameter  $a_1, a_2, \dots, a_m$  minimiert werden. In den meisten praktisch relevanten Fällen wird als zu minimierendes Abweichungsmaß nach Gauß die Summe  $S$  der Abweichungsquadrate benutzt:

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} g_i \cdot [Y_i(T_i) - f(T_i, a_1, a_2, \dots, a_m)]^2 \rightarrow \text{Minimum} \quad (2-1)$$

Die hierauf beruhenden Verfahren werden auch als Regressionsverfahren bzw. „Least-Square-Fit“-Verfahren bezeichnet. Die Parameter der Regressionsfunktion  $f(T, a_1, a_2, \dots, a_m)$  werden durch Lösung des nichtlinearen Normalgleichungssystems bestimmt:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0$$

	Bestimmung von	DKD-R 5-6	
	Thermometerkennlinien	Ausgabe:	09/2018
	<a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	Revision:	0
		Seite:	12/53

Anmerkung: In üblichen Berechnungsweisen ist die Unsicherheit der  $T_i$  in der Unsicherheit der  $Y_i(T_i)$  enthalten und braucht deshalb in vielen Fällen nicht berücksichtigt zu werden.

Als Funktionsansätze sind allgemein gebräuchlich:

- Lineare Funktionen:

$$f(T, a_1, a_2) = a_1 + a_2 \cdot T$$

- Polynome ( $m - 1$ )-ter Ordnung:

$$f(T, a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot T^{i-1} \quad \text{mit} \quad m < N$$

- Sensorspezifische Funktionen, z.B. speziell die Callendar-van-Dusen-Gleichung:

$$f(T, R_0, A, B, C) = R_0 \cdot \left[ 1 + A \cdot T + B \cdot T^2 + C \cdot T^3 \cdot (T - 100 \text{ °C}) \right] \quad \text{mit} \quad C = 0 \text{ für } T > 0 \text{ °C und } N > 4$$

Die Aufstellung und Lösung des Normalgleichungssystems kann durch speziell entwickelte Programme erfolgen. Es ist jedoch eine ständig wachsende Vielzahl von Standard- und Spezialsoftwarepaketen hierfür verfügbar.

Aus theoretischen Gesichtspunkten sollte die Gleichung mit 10 zusätzlichen Messwerten überbestimmt sein, um die Tauglichkeit des gewählten mathematischen Modells zu beurteilen. Für den (üblichen) Fall, dass Kennlinien für bekannte Sensortypen bestimmt werden, bei denen die Übereinstimmung mit dem mathematischen Modell bereits überprüft wurde, kann zugunsten eines deutlich geringeren Messaufwandes mit mindestens zwei zusätzlichen Messwerten (Freiheitsgrad  $\nu \geq 2$ ) vorlieb genommen werden. Untersuchungen haben gezeigt, dass unter dieser Voraussetzung der entstehende zusätzliche Kennlinienfehler gering ist.

Für die Anzahl der Kalibrierpunkte gilt also:

- $N \geq m + 2$  als Mindestforderung für überprüfte Modelle
- $N \geq m + 10$  als Datensatz mit guter statistischer Sicherheit (für ungeprüfte Modelle)


Bei Approximationsverfahren ist durch Wahl der  $g_i$  als Wichtungsfaktoren bei der Berechnung der Summe  $S$  der Abweichungsquadrate eine Wichtung der einzelnen Kalibrierpunkte möglich. Eine unterschiedliche den einzelnen Kalibrierpunkten zuordenbare Messunsicherheit  $u_i$  kann so einfach durch Wahl von  $g_i$  berücksichtigt werden.

$$g_i = \frac{1}{u_i^2} \tag{2-2}$$

Die Vielfalt der zur Verfügung stehenden Standardsoftwarepakete zur Approximation wird bei der Forderung nach Wichtung der Messwerte allerdings bereits erheblich eingeschränkt.

### 2.3 Unsicherheiten der Kennlinie (Allgemeines)

Ein Anwender nutzt das Thermometer nicht exakt bei einer kalibrierten Temperatur, sondern mit Hilfe des ermittelten Zusammenhangs zwischen Temperatur und Eingangsgröße (z.B. Widerstand, Thermospannung, ...) bei einer beliebigen Temperatur innerhalb des kalibrierten Temperaturbereiches. Durch die Eigenschaften der in der Industrie üblicherweise genutzten mathematischen Modelle entstehen zusätzliche Fehler, da diese Modelle die Eigenschaften

	Bestimmung von	DKD-R 5-6	
	Thermometerkennlinien	Ausgabe:	09/2018
	<a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	Revision:	0
		Seite:	13/53

der realen Thermometerkennlinie nur unzureichend wiedergeben können. Dies wird vor allem bei Präzisionsmessungen erkennbar, wenn man bedenkt, dass die ermittelte Funktion (auf Basis des gewählten mathematischen Modells) vielfach außerhalb des Unsicherheitsbereiches (95 %) der Messpunkte  $\pm U[Y_i(T_i)]$  verläuft.

Die Unsicherheit der Thermometerkennlinie setzt sich zusammen aus der Unsicherheit der zur Berechnung genutzten Kalibrierpunkte, der Unsicherheit der Übereinstimmung des Kennlinienansatzes und des realen Thermometerverhaltens sowie eventueller numerisch bedingter Unsicherheitsbeiträge (Rundungsfehler).

### 2.3.1 Unsicherheit bei Interpolationsfunktionen

- Die Unsicherheit an den einzelnen Kalibrierpunkten ist der Kalibrierunsicherheit des betreffenden Punktes gleich.
- Die Unsicherheit zwischen den Kalibrierpunkten hängt je nach Ansatz nur von der Unsicherheit der benachbarten Stützstellen (stückweise Interpolation) oder den Unsicherheiten aller Kalibrierpunkte ab (globale Interpolationsfunktion). Sie kann wegen des eindeutigen funktionalen Zusammenhanges zwischen der Interpolationsfunktion  $Y(T)$  und den Stützstellen  $Y_i(T_i)$  mit dem Instrumentarium des Gaußschen Unsicherheitsfortpflanzungsgesetzes berechnet werden, falls die einzelnen Beiträge nicht korreliert sind:

$$u^2(y(T)) = \sum_{i=0}^N \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial T_i} \right)^2 \cdot u^2(T_i) \right] = \sum_{i=0}^N [C_i^2 \cdot u^2(T_i)]$$

Hier ergeben sich für Polygoninterpolation bzw. Lagrange-Polynome bei wenigen Stützstellen noch handhabbare, bei vielen Stützstellen bzw. Spline-Interpolation analytisch nicht mehr handhabbare Sensitivitätskoeffizienten  $C_{n,i}$ . In diesen Fällen können die  $C_{n,i}$  leicht durch numerische Berechnung der jeweiligen partiellen Ableitungen an den Stützstellen bestimmt werden.

### 2.3.2 Unsicherheit bei Approximationsfunktionen


Die Bestimmung der Unsicherheit bei Approximationsfunktionen besteht aus mehreren Schritten für die Abschätzung der einzelnen Beiträge:

#### 1) Unsicherheit der Approximationsfunktion $f(T_i, a_1, a_2, \dots, a_m)$ an den Kalibrierpunkten

Die mittlere Unsicherheit einer Approximationsfunktion mit  $m$  zu bestimmenden Koeffizienten (bzw. freien Parametern der Approximationsgleichung) und  $N$  Stützstellen kann aus der Summe der nach der Approximation verbleibenden Abweichungsquadrate (Residuenquadratsumme) berechnet werden:

$$u^2 = \frac{1}{N-m} \cdot \sum_{i=1}^N [y_i(T_i) - f(T_i, a_1, a_2, \dots, a_m)]^2 \quad \text{mit} \quad \nu = N - m$$

Dabei ist  $N-m$  der effektive Freiheitsgrad  $\nu$  des Systems. Wenn dieser Werte kleiner als 10 annimmt (dies ist bei Temperaturkalibrierungen fast immer gegeben), muss, analog zur Bestimmung der Typ-A-Unsicherheit einer Messreihe von kleinem Umfang ( $\rightarrow$  Gleichung (4) aus

	Bestimmung von Thermometerkennlinien <a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	14/53

[1] bzw. Gleichung (5) aus [24]), ein entsprechender Erweiterungsfaktor ( $\rightarrow$  Tabelle G.2 aus [1]) berücksichtigt werden.

## 2) Abschätzung der Unsicherheit der Approximationsfunktion $f(T, a_1, a_2, \dots, a_m)$ zwischen den Kalibrierpunkten

Der Unsicherheitsbeitrag der Approximationsfunktion  $Y(T) = f(T, a_1, a_2, \dots, a_m)$  ergibt sich allgemein zu:

$$u^2(y(T)) = \sum_{i=1}^m \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial a_i} \right)^2 \cdot u^2(a_i) \right] + 2 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{l=i+1}^m \left[ \frac{\partial f}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_l} \cdot u(a_i, a_l) \right]$$

Dabei enthält die erste Summe die Unsicherheitsbeiträge der einzelnen Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_m$  und der zweite Summenausdruck die durch die Korrelation der Koeffizienten bedingten Beiträge. Die erforderlichen Ableitungen können aus dem Ansatz für  $f(T, a_1, a_2, \dots, a_m)$  und den bestimmten Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_m$  leicht analytisch oder numerisch berechnet werden. Sie stellen die Sensitivitätskoeffizienten für die Beiträge der Einzelunsicherheiten dar. Die Unsicherheiten  $u(a_i)$  sowie die Kovarianzen  $u(a_i, a_l)$  stehen jedoch nicht immer zur Verfügung (bei Vorliegen der Koeffizientenmatrix des Normalgleichungssystems für die Approximation können sie dieser entnommen werden).

Es ergibt sich eine kombinierte Unsicherheit, die nicht im gesamten Kalibrierbereich konstant ist und in der Regel zu den Rändern des Kalibrierintervalles hin ansteigt.


Bei fehlenden Kovarianzen  $u(a_i, a_l)$  bzw. Unsicherheiten  $u(a_i)$  kann die Residuenquadratsumme als gute Schätzung verwendet werden. Sie berücksichtigt jedoch nicht die Modellabhängigkeit und kann in ungünstigen Fällen verfälschend sein.

$$u^2(Y(T)) \approx \frac{1}{N-m} \cdot \sum_{i=1}^N [Y_i(T_i) - f(T_i, a_1, a_2, \dots, a_m)]^2$$

Diese ergibt jedoch für den gesamten Kalibrierbereich einen festen Wert und berücksichtigt die Variation der Approximationsunsicherheit über den Kalibrierbereich nicht.

Bei Verwendung numerisch bestimmter Werte für die Kovarianzen  $u(a_i, a_l)$  bzw. die Unsicherheiten  $u(a_i)$  aus der Koeffizientenmatrix des Normalgleichungssystems sind eventuelle numerische instabilitätsbedingte Unsicherheitsbeiträge der verwendeten Software bereits teilweise berücksichtigt.

Die durch die Abweichung des Funktionsansatzes vom realen Thermometerverhalten bedingten Unsicherheitsanteile werden von den bisher angegebenen Unsicherheiten nicht erfasst. Erst bei höherer Messpunktanzahl ( $N \geq m+10$ ) im Falle von Approximationsfunktionen wird diese Abweichung mit erfasst. Bei kleinen Kalibrierpunktzahlen bzw. Interpolationsfunktionen sind hier zusätzliche Unsicherheitsbeiträge zu berücksichtigen, für die abhängig von Thermometer- und Kennlinientyp sowie vom Temperaturbereich bei den Abschnitten für die einzelnen Thermometer Erfahrungswerte angegeben sind.

	Bestimmung von Thermometerkennlinien <a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	15/53

Aus der Unsicherheit  $u(Y(T))$  der Kennlinie kann die zuzuordnende Unsicherheit  $u_{\text{Kennlinie}}(T)$  der Temperatur mit Hilfe des Anstieges der Kennlinie abgeschätzt werden.

$$u_{\text{Kennlinie}}(T) \approx \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial T}} \cdot u(Y(T))$$

Die im Kalibrierergebnis anzugebende Unsicherheit der Kalibrierpunkte (mit Hilfe der bestimmten Individualkennlinie aus den Anzeigewerten berechnete Temperaturen und Korrekturen) setzt sich dann aus der Unsicherheit des einzelnen Kalibrierpunktes  $u(T)$  (dem Messunsicherheitsbudget entnommen) und dem Anteil  $u_{\text{Kennlinie}}(T)$  zusammen.

## 2.4 Wahl der Stützstellen sowie des Kennlinientypes (Allgemeines)

Bei globalen Interpolationskennlinien sollte die Stützstellenanzahl je nach Stärke der Nichtlinearität des Sensors möglichst klein sein sowie die Stützstellenwahl möglichst gleichmäßig über den Kalibrierbereich verteilt erfolgen. Für stückweise Interpolation gilt diese Forderung entsprechend für jedes Interpolationsintervall.

Bei Approximationsfunktionen muss die Kalibrierpunktanzahl größer sein, als die Anzahl der freien Kennlinienparameter. Die Differenz zwischen der Kalibrierpunktanzahl und der Anzahl der freien Parameter entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems. Diese sollte mindestens 2 betragen, wenn möglich jedoch größer als 5 sein ( $\rightarrow$  2.2.2).

Bei der Festlegung der Mindestkalibrierpunktanzahl ist gegebenenfalls zu beachten, dass eventuell nicht alle Koeffizienten von allen Messpunkten mitbestimmt werden, so dass zusätzliche Bedingungen hier zu berücksichtigen sind.

Beispielsweise ist eine weit verbreitete Methode zur Approximation der Kennlinie von Pt-Widerstandsthermometern mit der Callendar-van-Dusen-Gleichung (DIN EN 60751) die folgende:

Zuerst werden mit allen Kalibrierpunkten  $T_i \geq 0 \text{ °C}$  die Koeffizienten  $R_0$ ,  $A$  und  $B$  bestimmt. In einem zweiten Schritt wird mit den Kalibrierpunkten  $T_i < 0 \text{ °C}$  der Koeffizient  $C$  ermittelt.

Es gilt somit:

$$\begin{array}{ll} T_{\min} \geq 0 \text{ °C} & m = 3 \quad (R_0, A, B) \\ T_{\max} \leq 0 \text{ °C} & m = 4 \quad (R_0, A, B, C) \\ T_{\min} < 0 \text{ °C} < T_{\max} & m = 4 \quad (R_0, A, B, C) \end{array}$$

Damit ergibt sich folgende Forderung für die Stützstellenanzahl  $N$  in den beiden Temperaturbereichen:

$$\begin{array}{ll} T_{\min} \geq 0 \text{ °C} & N \geq 5 \\ T_{\max} \leq 0 \text{ °C} & N \geq 6 \\ T_{\min} < 0 \text{ °C} < T_{\max} & N \geq 8 \quad (N \geq 5 \text{ für Schritt 1 und } N \geq 3 \text{ für Schritt 2}) \end{array}$$

Die letzte Forderung mit  $N \geq 8$  ist eine theoretische Höchstabschätzung. In der Praxis kann sie voraussichtlich reduziert werden. Wie weit dies im Einzelfall möglich ist, muss dann geprüft werden.

An diesem Beispiel sieht man die Problematik (größere Anzahl von Kalibrierpunkten benötigt) von „geteilten Funktionen“.

Vermeiden kann man das Problem in diesem Fall, in dem man den Algorithmus aus Kapitel 6.3.2 nutzt. Hierbei wird die Approximation in einem Schritt durchgeführt und die Forderung für die Stützstellenanzahl ergibt sich mit  $N \geq 6$ .

Die Randbedingungen aus Kapitel 3.4.4 müssen zusätzlich eingehalten werden.

Da die Unsicherheit der Kennlinie unter Beachtung der nie völlig vernachlässigbaren Korrelation zwischen den Koeffizienten zu den Enden des Kalibrierintervalles zunimmt, sind Extrapolationen möglichst zu vermeiden, da diese schnell zu sehr großen Fehlern führen können. Es ist daher an den Enden des erforderlichen Kalibrierintervalles mindestens jeweils ein Punkt zu wählen.

Extrapolationen sind nur unter Berücksichtigung einer deutlich größeren Unsicherheit unter folgenden Bedingungen möglich (gleichzeitiges Einhalten aller Bedingungen ist erforderlich):

- Die Kennlinie stellt eine Abweichungsfunktion mit geringer Nichtlinearität dar.
- Es erfolgt eine Approximation mit Funktionen niedriger Ordnung ( $m \leq 4$ ), d.h. es gibt nur wenige freie Parameter.
- Die Kalibrierpunktanzahl ist deutlich größer als die Anzahl der freien Parameter ( $N \geq m + 5$ ).

Diese Forderungen können zum Beispiel bei Pt-PtRh-Thermoelementen (Typ S) an der oberen Temperaturgrenze bis zu ca. 150 K Extrapolation erfüllt werden.

Interpolationsverfahren sind bei sehr kleinen Unsicherheiten der einzelnen Kalibrierpunkte *und* einer kleinen Anzahl etwa äquidistant verteilter Punkte gegenüber Approximationsansätzen vorzuziehen. Voraussetzung ist jedoch ein genau bekanntes mathematisches Modell der gesuchten Kennlinie.

Approximationsverfahren können bei ausreichender Kalibrierpunktanzahl prinzipbedingt die Unsicherheit der einzelnen Punkte in ihrer Auswirkung auf die Kennlinie teilweise ausgleichen.

Ein physikalisch begründbarer Ansatz mit entsprechender physikalischer Bedeutung der einzelnen Kennlinienkoeffizienten ist einem allgemeinen z.B. Polynomansatz in jedem Falle vorzuziehen.

In der Soft- und/oder Hardware des Kalibriergegenstandes bereits realisierte Kennlinientypen sind zu bevorzugen.


## 2.5 Softwareauswahl / Validierung

Zur numerischen Ermittlung der Koeffizienten der gewählten Gleichung bei ebenfalls gegebenen Wertepaaren (hier: Messwerten) existiert diverse kommerzielle Software am Markt. Zur Softwareauswahl können keine allgemeingültigen Vorgaben gemacht werden. Neben der Nutzung von Standardsoftware ist auch die laboreigene Erstellung von Auswertesoftware sowie die Nutzung eventuell gelieferter Kundensoftware möglich.

In jedem Falle sollte eine Validierung des numerischen Verfahrens für jeden verwendeten Kennlinientyp erfolgen. Hierfür empfiehlt sich die Nutzung von Testdatensätzen mit bekannten Kennlinienergebnissen. Die bei den einzelnen Abschnitten für die verschiedenen Thermometertypen angegebenen Test- und Beispieldatensätze ( $\rightarrow$  6.2) können hierfür genutzt werden.

Ebenfalls möglich ist der Vergleich von Ergebnissen verschiedener Programme oder Rechenverfahren. Wichtig dabei ist es, nicht die Koeffizienten miteinander zu vergleichen, sondern nur die resultierenden Funktionen. Aufgrund verschiedener Algorithmen und unterschiedlicher Rechengenauigkeit können unterschiedliche Koeffizienten auftreten, die sich aber gegenseitig kompensieren und so zu einem nahezu identischen Kurvenverlauf führen.



	Bestimmung von	DKD-R 5-6	
	Thermometerkennlinien	Ausgabe:	09/2018
	<a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	Revision:	0
		Seite:	17/53

Aus diesem Grund ist die Unsicherheit der Koeffizienten auch von geringerer Bedeutung für die Anwendung. Der Unsicherheitsbeitrag der resultierenden Thermometerkennlinie ist dagegen zu beachten.

Die numerische Stabilität ist bezüglich der Kalibrierpunktzahl (Hinzufügung bzw. Weglassen von Punkten als Stützstellen) und bezüglich der Auswirkungen von kleinen Unsicherheiten der Kalibrierpunkte (definierte geringfügige Veränderung einzelner Punkte und Untersuchung der resultierenden Auswirkungen auf die bestimmte Kennlinie) zu untersuchen.

**Im Rahmen der routinemäßigen Nutzung der Software wird dringend empfohlen, nach jeder durchgeführten Approximation die Ursprungsdaten (Messwerte) wieder in die ermittelte Funktion einzusetzen, um die Richtigkeit der ermittelten Koeffizienten zu überprüfen.**

## 2.6 Kalibrierschein

Grundlage für die Erstellung eines Kalibrierscheins ist die Schrift DAkKS-DKD-5 „Anleitung zum Erstellen eines Kalibrierscheines“. Bei der Angabe der Messunsicherheit ist auch die Schrift DAkKS-DKD-3 „Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen“ und hier speziell Kapitel 6 zu beachten.

Wird eine Kennlinie im Kalibrierschein angegeben, was der Normalfall ist, so wird diese im Abschnitt „Messergebnisse“ aufgeführt. Sie erscheint nach den einzelnen Kalibrierwerten und deren Messunsicherheiten.

Falls mehrere Sensoren in einem Kalibrierschein aufgeführt sind, z.B. bei Mehrkanaligen Messgeräten, so können die Kennlinien zusammengefasst nach den Kalibrierwerten aller Sensoren bzw. Messkanäle erscheinen *oder* mit dem jeweiligen Messwertesatz eines Sensors bzw. Messkanals zusammengefasst werden. In jedem Fall muss eine eindeutige Zuordnung von Sensor, Messkanal, Kalibrierwerten mit deren Messunsicherheiten und zugehöriger Kennlinie gegeben sein.


In einigen Fällen, wie z.B. Thermoelementen, kann es erforderlich sein, mehrere Teilkennlinien anzugeben. Die gültigen Temperaturbereiche für die jeweiligen Kennlinienteile sind klar zuzuordnen. Mehrdeutige Definitionen, z.B. durch Überlappungen von Teilkennlinien, sind zu vermeiden. Sie sind zulässig, wenn sie in gültigen Normen oder Richtlinien, wie z.B. der ITS-90, gestattet sind.

In besonderen Fällen kann es nötig sein, mehrere Kennlinientypen für einen Kalibrierdatensatz anzugeben. Dies mag z.B. erforderlich sein, falls ein Thermometer an verschiedenen Geräten betrieben wird, welche sich in der internen Datenaufbereitung unterscheiden. Diese Verfahrensweise sollte jedoch auf Ausnahmen beschränkt bleiben. Auch hier ist auf klare Zuordnungen zu achten.

Zu jeder Kennlinie oder Teilkennlinie muss der gültige Temperaturbereich angegeben werden und eine Unsicherheit zugeordnet werden können. Die angegebene Messunsicherheit muss alle Unsicherheitskomponenten enthalten, einschließlich der Anteile der Kalibrierwerte (Einflüsse von Normal, Kalibriergegenstand und Kalibrierverfahren) und den Einfluss der begrenzten mathematischen Beschreibbarkeit (Approximierbarkeit) des Thermometerverhaltens durch die entsprechende Kennlinienfunktion (mathematisches Modell).

Werden verschiedene Messunsicherheiten in Abhängigkeit der Temperatur angegeben, so müssen die Abschnittsgrenzen nicht zwingend mit den Grenzen von evtl. vorhandenen Teilkennlinien zusammenfallen.

Ist eine eindeutige Zuordnung möglich, so kann die Angabe der Messunsicherheit für die Kennlinie auch im Abschnitt „Messunsicherheit“ erfolgen.

	Bestimmung von Thermometerkennlinien <a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	18/53

Die Angabe der Unsicherheit von Koeffizienten ist nicht gefordert, sie kann jedoch als Hinweis dienen, die Stellenzahl der angegebenen Koeffizienten auf ein sinnvolles Maß zu begrenzen.

Ein Muster für die Abschnitte „Messergebnisse“ und „Messunsicherheit“ in einem Kalibrierschein ist im Anhang 6.4 zu finden.

### 3 Platinwiderstandsthermometer

Dieses Kapitel gilt prinzipiell für alle Platinwiderstandsthermometer. Es ist jedoch speziell auf die Anforderungen von Pt-100-Thermometern zugeschnitten. Da diese, je nach Sensortyp, Bauform und Temperaturbereich, sehr unterschiedliche Messunsicherheiten aufweisen, werden verschiedene Anforderungen an die Messunsicherheit berücksichtigt.

#### 3.1 Typen der Approximationsgleichungen

Gleichungen der Form  $t = f(R)$  haben sich in der Praxis nicht durchgesetzt, da sie das Verhalten eines Platinwiderstandsthermometers weniger gut beschreiben. Nur mit Funktionen höherer Ordnung (und deren bekannten Nachteilen) können so Kennlinien für Platinwiderstandsthermometer gut beschrieben werden.

Im Folgenden werden einige Kennlinientypen betrachtet, welche sich in der Praxis als zweckmäßig erwiesen haben, da einerseits das Verhalten der Platinwiderstandsthermometer für die meisten Fälle ausreichend gut beschrieben wird und andererseits der mathematische Aufwand zum Verständnis und zur Behandlung dieser Gleichungen noch vertretbar ist. Aus diesen Gründen haben die folgenden Kennlinientypen auch eine gute, teilweise sogar sehr große Verbreitung gefunden.

Die mathematische Darstellung der beschriebenen Gleichungen erfolgt in Tabelle 3.1. Im Anhang 6.1.1 sind die zu erwartenden Unsicherheitseinflüsse aufgeführt.

##### 3.1.1 Callendar-van-Dusen-Gleichung

Weit verbreitet ist die Callendar-van-Dusen-Gleichung (CvD), wie sie auch in der DIN EN IEC 60 751 zur Darstellung der so genannten DIN-Kennlinie genutzt wird. (Siehe Gleichung Nr. 1 in Tabelle 3.1)

Für gängige Pt-100-Typen ist sie für moderate Anforderungen an die Messunsicherheit über einen weiten Temperaturbereich geeignet.

##### 3.1.2 Standard-Polynom


Für Anwendungen von  $-40\text{ °C}$  bis zu  $600\text{ °C}$  sind Standard-Polynome (Gleichungen Nr. 2 bis 4 in Tabelle 3.1) gut geeignet für mittlere bis hohe Anforderungen an die Unsicherheit. Abhängig ist diese vom Grad des Polynoms (siehe Anhang 6.1.1).

Vor der Approximation ist zu entscheiden, ob die Polynomfunktion durch den Wert  $R_0$  bei  $0\text{ °C}$  exakt hindurchgehen soll. Ist dies nicht erforderlich, so kann  $R_0$  gleichberechtigt mit den anderen Koeffizienten approximiert werden ( $\rightarrow$  3.2.1).

##### 3.1.3 Abweichungspolynom

Für große Temperaturbereiche, die durch Approximationsgleichungen mit kleinen Unsicherheiten abgedeckt werden sollen, empfiehlt sich die Verwendung von Abweichungspolynomen zur ITS-90-Referenzfunktion<sup>1</sup>. (Siehe Gleichungen Nr. 5 bis 7 in Tabelle 3.1)

<sup>1</sup> Festlegung der Zuordnung von Temperatur und Widerstand eines Platinwiderstandsthermometers mit ideal reinem Platin. [18]

	Bestimmung von	DKD-R 5-6	
	Thermometerkennlinien	Ausgabe:	09/2018
	<a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	Revision:	0
		Seite:	19/53

Obwohl eine Kalibrierung gemäß ITS-90 nur für Platinwiderstandsthermometer aus hochreinem Platin mit einem  $W_{\text{Ga}} \geq 1,11807$  <sup>(2)</sup> zulässig ist, beschreibt die ITS-90-Referenzfunktion auch das prinzipielle Verhalten von industriellen Platinwiderstandsthermometern recht genau. Die Abweichungsfunktionen zu dieser Referenz können von sehr niedriger Ordnung sein (typischerweise erste oder zweite Ordnung). Daraus folgt zusätzlich zu den kleinen Unsicherheiten eine Reduzierung des Mess(zeit-)aufwandes.

Diese Art der Approximation ist nur empfehlenswert für thermisch stabile Thermometertypen, deren Kennlinie mit zusätzlichen Messpunkten (Freiheitsgrade<sup>3</sup>  $\nu \geq 5$ ) auf die Eignung dieses Gleichungstyps (bzw. der ITS-90-Referenzfunktion als Basisfunktion) untersucht wurde.

### 3.2 Verwenden der Messwerte

Die Ausgangsdaten für die Approximation werden in vielen Fällen Messwerte sein, wie sie im Kalibrierschein erscheinen. Wie die Daten in die Mathematik der Approximation eingespeist werden ist abhängig von der thermischen Stabilität des jeweiligen Thermometers, vom benutzten Temperaturbereich und der geforderten Messunsicherheit.

Die folgenden Unterabschnitte behandeln verschiedene Aspekte der Datenaufbereitung, welche jedoch nicht immer unabhängig voneinander sind und deshalb auch mehrfach Erwähnung finden.

#### 3.2.1 $R_0$ -Wert

Bei nahezu jeder Kalibrierung wird auch der Widerstand des Platinthermometers am Eispunkt ( $R_0$ ) oder am Wassertripelpunkt ( $R_{0,01}$ ) bestimmt. Häufig sogar mehrmals (beispielsweise am Anfang und am Ende der Kalibrierung).

Für weniger präzise Anforderungen ist es ausreichend, alle Daten – auch die Messwerte am Nullpunkt – gleichberechtigt zu approximieren. Durch die (meist) mehrmals durchgeführten Messungen am Nullpunkt ergibt sich für diese Temperatur automatisch ein höheres Gewicht (→ Kapitel 2.2.2 und Gleichung 2-2) bei der Approximation. Dies ist auch sinnvoll, da die Temperatur des Nullpunktes i. Allg. am genauesten dargestellt wird und der Kalibriergegenstand durch die Mehrfachmessung (zu verschiedenen Zeitpunkten) bei dieser Temperatur auch sehr genau bekannt ist.

Im Fall, der im Testdatensatz (→ 6.2.1) angegeben ist ergibt sich der  $R_0$ -Wert aus der Approximation, ist also das Ergebnis einer Berechnung.

Alternativ kann für den Nullpunkt auch der arithmetische Mittelwert aller  $R_0$ - bzw.  $R_{0,01}$ -Messungen bzw. der Wert der letzten Nullpunktmessung verwendet werden. (Abhängig davon, ob eine → „ $W$ -Wert Bildung“ durchgeführt wird; Abschnitt 3.2.2)


Die Anzahl der erforderlichen Messwerte (→ 3.4) ist unabhängig davon, ob der Nullpunkt durch einen Messwert (bzw. Mittelwert von Messwerten) festgelegt *oder* approximiert wird. Die Gleichung besitzt bei festgelegtem Nullpunkt zwar einen freien Parameter weniger, dies wird durch den erforderlichen Messwert zur Festlegung von  $R_0$  jedoch aufgehoben. Der Messaufwand bleibt hiervon also unberührt.

Der Nullpunkt wird in den Gleichungen üblicherweise durch  $R_0$  dargestellt.

Wenn vom Kunden gefordert, kann  $R_0$  durch  $R_{0,01}$  ersetzt werden. Dies ist vor Berechnung der Koeffizienten zu berücksichtigen.

<sup>2</sup> Widerstandsverhältnis des Thermometers:  $W_{\text{Ga}} = R(29,7646 \text{ °C}) / R(0,01 \text{ °C})$

<sup>3</sup> Freiheitsgrad  $\nu = n - p$  mit  $n$ : Anzahl der Messpunkte  
 $p$ : Anzahl der freien Parameter der Approximationsgleichung  $f(t)$

	Bestimmung von	DKD-R 5-6	
	Thermometerkennlinien	Ausgabe:	09/2018
	<a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	Revision:	0
		Seite:	20/53

$R_{0,01}$  kann über die folgende Beziehung in  $R_0$  umgerechnet werden:

$$R_0 \cong R_{0,01} \cdot 0,999\,961 \quad (3-1)$$

### 3.2.2 $W$ -Wert Bildung

Bei der Drift eines Sensors ändern sich in den meisten Fällen vor allem die Widerstandsmesswerte, z.B. am Wassertripelpunkt. Die Kennlinie im Verhältnis zum Wassertripelpunkt bleibt dagegen weitgehend unverändert. Der Vorteil der Verhältnisbildung liegt in der besseren Charakterisierung des Thermometers. Sie ist dadurch weitgehend unabhängig gegenüber einer Änderung des Thermometerwiderstandes nach thermischer oder mechanischer Belastung, solange nur ein aktueller Wassertripelpunktwert bekannt ist.

Für driftbehaftete Sensoren oder sehr genaue Anforderungen an die Approximation ist vor der Berechnung der Kennlinie eine  $W$ -Wert-Bildung erforderlich. Dies bedeutet, dass zu jedem Widerstandsmesswert  $R_x$  bei einer Temperatur  $t_x$  das Verhältnis zum Widerstandswert  $R_{0,01}$  am Wassertripelpunkt (0,01 °C) gebildet wird über

$$W(t_x) = R_x/R_{0,01}. \quad (3-2)$$

Zwischen den Messungen bei  $t_x$  und 0,01 °C darf der Thermometersensor nicht wesentlich driften. Diese beiden Messungen sollten zeitlich möglichst dicht beieinander liegen. Optimal ist eine Messung am Wassertripelpunkt direkt im Anschluss an die Messung bei  $t_x$ . Je öfter der Wassertripelpunkt gemessen wird (idealerweise nach *jeder* Temperatur  $t_x$ ), um so präziser wird die Approximation. Kann unter bestimmten Bedingungen (z. B. in bestimmten Temperaturbereichen) eine Drift des Sensors ausgeschlossen werden, ist hierbei eine mehrfache Messung des  $R_{0,01}$ -Wertes nicht erforderlich.

Die unten angegebenen Gleichungen 1 bis 4 lassen sich auch mit  $W$ -Werten verwenden. Bei Multiplikation der  $W$ -Werte mit dem aktuellem Wassertripelpunktwert ergeben sich wieder Widerstandswerte, wie sie in den genannten Gleichungen verwendet werden.

Die hier angegebene Form der Gleichungen 1 bis 4 gestattet die Verwendung eines aktuellen Messwertes am Nullpunkt, ohne dass eine Neubestimmung der Koeffizienten erforderlich ist. Für die Gleichungen 5 bis 7 trifft dies prinzipbedingt ohnehin zu.

Sinngemäß ist das geschilderte Verfahren auch mit Eispunktmessungen von  $R_0$  bei 0 °C möglich. Die Umrechnung von  $R_{0,01}$  in  $R_0$  ist in Abschnitt 3.2.1 beschrieben.

### 3.2.3 Wichtungsfaktoren

Wenn die verwendeten Messwerte mit unterschiedlichen Messunsicherheiten behaftet sind, kann diesem Umstand bei der Approximation durch die Einführung von Wichtungsfaktoren Rechnung getragen werden. Je nach Anordnung der Messwerte und den Unterschieden der Messunsicherheiten besteht jedoch die Gefahr von Polynomüberschwingern. Durch eine große Anzahl von Messwerten wird diese Gefahr geringer. Vor einer Wichtung muss eine ungünstige oder unrealistische Kennlinienapproximation ausgeschlossen werden. Speziell die Messunsicherheiten der einzelnen Kalibrierpunkte müssen korrekt ermittelt werden.

Die Randbedingungen aus den Abschnitten 3.3 und 3.4 sind hierbei besonders zu beachten.

Die mathematische Durchführung der Wichtung ist in Abschnitt 2.2.2 dargestellt.

### 3.3 Anordnung der Stützstellen

- Die Stützstellen (Messwerte) müssen möglichst gleichmäßig über den gesamten Temperaturbereich verteilt sein.
- Betrachtet man die Abweichungsfunktion zwischen realer Kennlinie und mathematischem Modell, müssten die Stützstellen idealerweise an den Nulldurchgängen („Knoten“) und Extremwerten (Maxima / Minima) dieser Abweichungsfunktion liegen.
- An den Grenzen des Temperaturbereiches müssen Stützstellen vorhanden sein.
- Eine Extrapolation über diese Grenzen hinaus ist nicht zulässig und würde zu schnell wachsenden Abweichungen gegenüber dem realen Thermometer führen.

### 3.4 Anzahl der Stützstellen

Praktischen und numerischen Untersuchungen kann man entnehmen, dass ab ca. zwei Freiheitsgraden ( $\nu \geq 2$ ) der Einfluss der Stützstellenzahl auf die Approximationsfunktion eines typischen Pt-100-Thermometers nur noch untergeordneten Einfluss hat.

In besonderen Fällen sind auch Approximationen mit einem Freiheitsgrad ( $\nu = 1$ ) oder Interpolationen ( $\nu = 0$ ) möglich. Die Unsicherheit der resultierenden Kennlinienfunktion ist dann jedoch signifikant erhöht. (Vergleiche auch Tabelle 6.1 und Tabelle 6.2) Derartige Approximationen führen nur unter bestimmten Bedingungen (z.B. eingeschränkter Temperaturbereich) zu sinnvollen Ergebnissen. (→ 3.4.2)

#### 3.4.1 Gewöhnlich bekannte Thermometertypen (Normalfall)

Entsprechend ergibt sich für  $\nu = 2$  die Anzahl der geforderten Messwerte – bei einem Pt-100-Typ, der nicht den Anforderungen aus Abschnitt 3.4.2 genügt (Normalfall) – aus folgender Tabelle:

Nr	Gleichung	min. Anzahl der Messwerte
1	Callendar-van-Dusen (CvD) $R = R_0 \cdot (1 + At + Bt^2 + C(t - 100 \text{ °C})t^3) \quad   \quad C = 0 \text{ für } t > 0 \text{ °C}$	$6^4$ 5 für $t_{\min} \geq 0 \text{ °C}$
2	2. Ord: $R = R_0 \cdot (1 + at + bt^2)$	5
3	3. Ord: $R = R_0 \cdot (1 + at + bt^2 + ct^3)$	6
4	4. Ord: $R = R_0 \cdot (1 + at + bt^2 + ct^3 + dt^4)$	7
5	ITS + 1. Ord: $W(t) = W_i(t) + a(W(t)-1)$	4
6	ITS + 2. Ord: $W(t) = W_i(t) + a(W(t)-1) + b(W(t)-1)^2$	5
7	ITS + 3. Ord: $W(t) = W_i(t) + a(W(t)-1) + b(W(t)-1)^2 + c(W(t)-1)^3$	6

Tabelle 3.1

#### 3.4.2 Genau untersuchte Thermometertypen (Sonderfall)

Approximationen mit weniger Freiheitsgraden sollten grundsätzlich nur in begründeten Ausnahmefällen durchgeführt werden.

<sup>4</sup> Bei besonderer Beachtung der Kapitel 2.4 und 3.4.4.

Die folgenden Voraussetzungen müssen *alle* erfüllt sein, um Kennlinien mit weniger als zwei Freiheitsgraden ( $\nu < 2$ ) zu approximieren bzw. zu interpolieren:

- der Thermometertyp (gleiche Typenbezeichnung und Bauart) ist aus vorhergehenden Untersuchungen mit zusätzlichen Messpunkten (Freiheitsgrade  $\nu \geq 5$ ) bezüglich der Streuung der Kennlinien mehrerer ( $\geq 10$ ) Thermometerexemplare bekannt; bei einem maximalen Temperaturbereich von 0 °C bis 100 °C sind für die Untersuchungen Freiheitsgrade von  $\nu \geq 3$  ausreichend
- die Interpolationsfunktion ist nachweislich geeignet für diesen Thermometertyp und Temperaturbereich, d.h. die Approximierbarkeit der Kennlinien dieses Thermometertyps wurde in früheren Untersuchungen mit zusätzlichen Messpunkten bezüglich der Abweichung zwischen Kennlinienfunktion und Messwerten untersucht
- der Temperaturbereich sollte eingeschränkt sein (üblicherweise –40 °C bis 200 °C oder ein Teilbereich davon) und muss innerhalb des gründlich untersuchten Temperaturbereiches liegen
- die Stützstellen (Messwerte) sind gleichmäßig über den gesamten Temperaturbereich verteilt (siehe auch Abschnitt 3.3)
- der Einfluss der Anzahl der Messpunkte auf die Unsicherheit der Kennlinienapproximation muss ermittelt und berücksichtigt werden
- die Messunsicherheit ist dadurch erhöht gegenüber einer Kalibrierung mit zusätzlichen Messpunkten. (Berücksichtigung im Messunsicherheitsbudget!)

Entsprechend des Freiheitsgrades reduziert sich die Anzahl der erforderlichen Messwerte lt. Tabelle 3.1.


Bei nicht Erfüllung *einer* der o.g. Bedingungen sind zwei Freiheitsgrade das absolute Minimum. Weiterführende Informationen zur Wahl der Stützstellen ( $\rightarrow$  2.4) und den resultierenden Unsicherheiten ( $\rightarrow$  2.3) sind im Kapitel „Grundlagen“ erläutert.

### 3.4.3 Bekannte Thermometerexemplare (Rekalibrierung)

Wird ein individuelles Thermometer rekalibriert und ist dieses Exemplar aus mindestens einer vorhergehenden Kalibrierung mit zusätzlichen Messpunkten bekannt, so kann die Anzahl der erforderlichen Messwerte für die folgende(n) Kalibrierung(en) reduziert werden. Es ergeben sich vergleichbare Forderungen wie in Abschnitt 3.4.2.

Die folgenden Voraussetzungen müssen *alle* erfüllt sein, um Kennlinien mit weniger als zwei Freiheitsgraden ( $\nu < 2$ ) zu approximieren bzw. zu interpolieren:

- das Thermometerexemplar ist aus vorhergehenden Kalibrierungen mit zusätzlichen Messpunkten (Freiheitsgrade  $\nu \geq 3$ ) bekannt; bei einem maximalen Temperaturbereich von 0 °C bis 100 °C sind zusätzliche Messpunkte für Freiheitsgrade  $\nu \geq 2$  ausreichend
- die Eignung der Kennlinienfunktion für dieses Thermometerexemplar wurde durch die Kalibrierung(en) mit zusätzlichen Messpunkten bestätigt
- der Temperaturbereich sollte eingeschränkt sein (üblicherweise –40 °C bis 200 °C oder ein Teilbereich davon) und muss innerhalb des Temperaturbereiches liegen, bei dem die Kalibrierung(en) mit zusätzlichen Messpunkten erfolgte(n)
- die Stützstellen (Messwerte) sind gleichmäßig über den gesamten Temperaturbereich verteilt (siehe auch Abschnitt 3.3)
- der Einfluss der Anzahl der Messpunkte auf die Unsicherheit der Kennlinienapproximation muss ermittelt und berücksichtigt werden

	Bestimmung von	DKD-R 5-6	
	Thermometerkennlinien	Ausgabe:	09/2018
	<a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	Revision:	0
		Seite:	23/53

- die Messunsicherheit ist dadurch erhöht gegenüber einer Kalibrierung mit zusätzlichen Messpunkten. (Berücksichtigung im Messunsicherheitsbudget!)

### 3.4.4 Temperaturen unter 0 °C

Aufgrund der Eigenschaften von Platinwiderstandsthermometer-Sensoren ist die Bestimmung der Kennlinie im negativen Temperaturbereich teilweise problematisch bzw. mit deutlich größeren Unsicherheiten behaftet.

Wird ein Platinwiderstandsthermometer im negativen Temperaturbereich kalibriert, müssen die folgenden Punkte beachtet werden:

- Bei Messbereichen, die unterhalb von -40 °C beginnen, sind im negativen Bereich mindestens zwei Stützstellen anzusiedeln. Beim Messbereichsanfang unterhalb von -80 °C mindestens drei. Die Anzahl gilt exklusive des Messwertes bei 0 °C.
- Bei Messbereichen, die unterhalb von -40 °C beginnen und dabei gleichzeitig oberhalb von 200 °C enden, ist der Wert für die minimale Anzahl der Stützstellen aus Tabelle 3.1 um mindestens eins zu erhöhen (Freiheitsgrade  $\nu \geq 3$ ). Dies kann ggf. auch bei niedrigeren oberen Bereichsgrenzen der Fall sein, um im positiven Bereich der Kennlinie noch ausreichend Stützstellen zur Verfügung zu haben.
- Für eine gute Approximation im negativen Temperaturbereich unterhalb von -80 °C ist es sinnvoll, die Abweichungen der Messwerte zur ITS-90-Referenzfunktion zu approximieren (→ 3.1.3).

Alternativ bietet sich eine bei 0 °C geteilte Funktion an. Dieses Verfahren benötigt jedoch für jede der Teilfunktionen eine entsprechende Anzahl von Stützstellen (→ Tabelle 3.1). Somit ist hierfür ein erhöhter Messaufwand erforderlich.

Bei Verwendung der Callendar-van-Dusen-Gleichung für einen Temperaturbereich von  $T_{\min} < 0 \text{ °C} < T_{\max}$  sollte der Algorithmus aus Kapitel 6.3.2 genutzt werden, um die Anzahl der erforderlichen Messpunkte entsprechend Tabelle 3.1 verwenden zu können. Andernfalls ist Kapitel 2.4 besonders zu beachten.

Ist der Thermometertyp gemäß Abschnitt 3.4.2 sehr gut bekannt und wird beispielsweise mit einer Abweichungsfunktion für den speziellen Thermometertyp gearbeitet, so können diese Punkte ggf. außer Acht gelassen werden. Als Folge können jedoch – teilweise drastisch – erhöhte Unsicherheiten der Approximation auftreten.

### 3.4.5 Hohe Temperaturen


Einige Thermometertypen verhalten sich oberhalb von ca. 500 °C untypisch für Pt-100. Dies äußert sich durch eine abgeflachte Kennlinie dieser Thermometer.

Der tatsächliche Kennlinienverlauf in diesem Temperaturbereich muss dann mit Hilfe von zusätzlichen Messpunkten ermittelt werden.

Hierbei muss geklärt werden, ob

- das für den gewünschten Anwendungsfall (Temperaturbereich, Messunsicherheit) gewählte mathematische Modell gemäß Anhang 6.1.1 trotzdem zutreffend ist oder mit erhöhten Approximationsfehlern gerechnet werden muss und
- die Anzahl der Stützstellen gemäß Tabelle 3.1 ausreichend sind.

Diese Untersuchung ist nur für einige repräsentative Exemplare ( $\geq 5$ ) eines Thermometertyps, jedoch für jeden gewünschten Temperaturbereich erforderlich.

	Bestimmung von Thermometerkennlinien <a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	24/53

### 3.5 Ermittlung einer geeigneten Kennlinienbeschreibung

Die Entscheidung, welche Approximationsgleichung verwendet wird, hängt primär von der gewünschten Messunsicherheit und dem geforderten Temperaturbereich ab. Da die Bedingung für die Anzahl der Freiheitsgrade  $\nu \geq 2$ , abgesehen von Ausnahmen ( $\rightarrow$  3.4.2, 3.4.3), erfüllt sein muss, sollten diese Überlegungen immer vor Beginn der Kalibrierung erfolgen. Nur so können geeignete Kalibrierpunkte (Anzahl und Anordnung) für die gewünschte Approximationsgleichung ausgewählt werden.

Einzelheiten zur Auswahl einer geeigneten Gleichung sind in Abschnitt 3.1 zu finden. Geeignete Approximationsgleichungen und Hinweise zu deren Unsicherheiten werden in Abschnitt 6.1 behandelt. Die mathematischen Grundlagen befinden sich im Abschnitt 2.3.

In Anhang 6.1.1 sind für verschiedene Fälle gebräuchliche Approximationsgleichungen vorgeschlagen. Geeignete Gleichungen können auch mit kommerzieller Mathematik- bzw. spezieller Approximationssoftware ermittelt werden ( $\rightarrow$  2.5).

Die zu erwartende Unsicherheitskomponente, die zusätzlich zur Messung durch die Eigenschaften der jeweils verwendeten Kennliniengleichung hervorgerufen wird, ist in Anhang 6.1.1 angegeben.

### 3.6 Rechenverfahren

Die Softwareauswahl erfolgt gemäß Abschnitt 2.5.

Alle in Anhang 6.1.1 aufgeführten Approximationsgleichungen lassen sich auf ein Gauß-Polynom zurückführen, welches mit Hilfe einer Matrixgleichung gelöst werden kann. Stellvertretend ist das Gleichungssystem für das Polynom 2. Ordnung in Anhang 6.3.1 aufgestellt.

Eine Ausnahme bildet die Callendar-van-Dusen-Gleichung (CvD). Obwohl es eine geteilte Funktion ist, existiert auch hier eine geschlossene Lösung, bei der alle Koeffizienten in einem Schritt ermittelt werden. Der Vorteil ist, dass *auch* der Kennlinienteil unter  $0\text{ °C}$  zur Ermittlung der Koeffizienten  $a$  und  $b$  herangezogen wird. Das Gleichungssystem für die Callendar-van-Dusen-Gleichung ist in Anhang 6.3.2 aufgestellt.

#### 3.6.1 Test des Rechenverfahrens

Nach jeder durchgeführten Approximation sollten die Messwerte in die resultierende Funktion eingesetzt werden und mit den Ausgangsdaten verglichen werden, um sowohl Rechen- wie auch Mess- und Übertragungsfehler ausschließen und ggf. erkennen zu können.

Unabhängig davon müssen neue Rechenverfahren oder Software einem grundlegenden Test unterzogen werden. Allgemeines hierzu ist in den Kapiteln 2.5 und 6.2, spezielles zu Platinwiderstandsthermometern in 6.2.1 zu finden.



## 4 Thermoelemente

### 4.1 Typen der Approximationsgleichungen

Im Folgenden werden zwei Möglichkeiten betrachtet, die sich in der Praxis als zweckmäßig erwiesen haben, die individuellen thermoelektrischen Eigenschaften von Thermoelementen ausreichend gut zu beschreiben, und die den mathematischen Aufwand zum Verständnis und zur Behandlung der damit verbundenen Gleichungen in vertretbarem Aufwand halten.

#### 4.1.1 Standard-Polynom

Für die Kalibrierung von Thermoelementen mit unedlen Thermodrähten im Vergleichsverfahren sind i. Allg. Standard-Polynome gut geeignet den Zusammenhang zwischen Temperatur und Thermospannung zu beschreiben. In Abhängigkeit vom Thermoelementtyp und den geforderten Messunsicherheiten sind häufig Polynome 4. bis 6. Ordnung ausreichend. Für geringe Anforderungen an die Messunsicherheit und eingeschränkte Temperaturbereiche können häufig bereits Polynome ab 2. Ordnung verwendet werden.

#### 4.1.2 Abweichungspolynom

Für die Kalibrierung von Thermoelementen mit Thermodrähten aus Edelmetallen im Vergleichsverfahren oder an Fixpunkten empfiehlt sich die Verwendung von Abweichungspolynomen 2. oder 3. Ordnung zu den jeweiligen Referenzkennlinien. Insbesondere bei Fixpunktkalibrierungen mit einer nur begrenzten Anzahl von Kalibrierpunkten ergibt sich die Notwendigkeit, einen Bezug auf die jeweilige Referenzkennlinie herzustellen.

## 4.2 Verwenden der Messwerte

### 4.2.1 Wichtungsfaktoren

Wenn die verwendeten Messwerte mit unterschiedlichen Messunsicherheiten behaftet sind, kann diesem Umstand bei der Approximation durch die Einführung von Wichtungsfaktoren Rechnung getragen werden. Je nach Anordnung der Messwerte und den Unterschieden der Messunsicherheiten besteht jedoch die Gefahr von Polynomüberschwingern. Durch eine große Anzahl von Messwerten wird diese Gefahr geringer. Vor einer Wichtung ist sicherzustellen, dass eine ungünstige oder unrealistische Kennlinienapproximation ausgeschlossen werden kann.

Die Randbedingungen aus den Abschnitten 4.3 und 4.4 sind hierbei besonders zu beachten.

Die mathematische Durchführung der Wichtung ist in Abschnitt 2.2.2 dargestellt.

### 4.3 Anordnung der Stützstellen

- Die Stützstellen (Messwerte) beim Vergleichsverfahren müssen möglichst gleichmäßig über den gesamten Temperaturbereich verteilt sein.
- An den Grenzen des Temperaturbereiches müssen Stützstellen vorhanden sein.
- Eine Extrapolation über diese Grenzen hinaus ist zulässig, führt aber zu vergrößerten Messunsicherheiten in den extrapolierten Temperaturbereichen (→ 4.3.1).

#### 4.3.1 Extrapolation der Messergebnisse

Prinzipiell wird eine Extrapolation von Messwerten nur bei Kalibrierungen von Edelmetall-thermoelementen (Typen S, R und Platin/Palladium Thermoelemente) an Fixpunkten aufgrund fehlender Kalibrierpunkte oberhalb der Erstarrungstemperatur von Kupfer notwendig. Bei Kalibrierungen im Vergleichsverfahren kann die Auswahl der Kalibrierpunkte i. Allg. ohne Beschränkung auf Grundlage des geforderten Temperaturbereiches erfolgen.

Aus statistischen Untersuchungen der Kalibrierergebnisse von 33 Thermoelementen des Typs S, die im Fachbereich „Temperatur“ der PTB an Fixpunkten kalibriert wurden, lassen sich Abschätzungen für die zusätzliche Unsicherheit bei einer Extrapolation der gemessenen Thermospannungen auf 1200 °C ableiten. Für alle Thermoelemente wurden Abweichungsfunktionen 1. und/oder 2. bis 3. Ordnung von der Referenzkennlinie ermittelt. In einem weiteren Schritt wurden mit Hilfe der für jedes Thermoelement bestimmten zwei oder drei Approximationsgleichungen die Thermospannungen bei 1200 °C berechnet und die maximale Differenz zwischen diesen Spannungen bestimmt. Die mittlere Spannungsdifferenz der 33 Thermoelemente bei 1200 °C betrug 2,3 µV, die maximale Thermospannungsdifferenz (ein Thermoelement) betrug 3,8 µV. Betrachtet man den letzten Wert als Grenzwert, kann eine Rechteckverteilung angenommen werden, so dass im Unsicherheitsbudget ein Unsicherheitsbeitrag von 2,2 µV berücksichtigt werden muss. Wird die mittlere Thermospannungsdifferenz herangezogen (Normalverteilung), so ergibt sich als Unsicherheitsbeitrag ein vergleichbarer Wert von 2,3 µV.

Diese Abschätzungen sind konform mit den veröffentlichten Daten [30] zur Extrapolation von Thermospannungen von Thermoelementen Typ S und R bis auf 1300 °C (mittlere Abweichung: 1,4 µV, maximale Abweichung: 3 µV).


#### 4.4 Anzahl der Stützstellen

Eine Interpolation (→ 2.2.1) der Messwerte, also Verwendung von nur soviel Messpunkten bei unterschiedlichen Temperaturen wie die verwendete Gleichung freie Parameter hat, ist nur unter eingeschränkten Bedingungen sinnvoll. Die nachfolgend genannten Voraussetzungen müssen erfüllt sein:

- das Thermoelement ist aus vorhergehenden Kalibrierungen mit zusätzlichen Messpunkten (Freiheitsgrade  $\nu \geq 5$ ) bezüglich der Streuung der Messwerte bekannt;
- die Anzahl der berechneten Koeffizienten der gewählten Interpolationsgleichung (keine Abweichungsfunktion) entspricht der Anzahl der Koeffizienten der jeweiligen Referenzkennlinie für diesen Thermoelementtyp und Temperaturbereich
- *oder* eine Abweichungsfunktion zu Referenzkennlinien wird bestimmt;
- das Thermoelement wird nur in einem sehr eingeschränkten Temperaturbereich kalibriert;
- eine vergrößerte Messunsicherheit gegenüber einer Kalibrierung mit zusätzlichen Messpunkten wird angegeben,
- dieser Anteil muss bei der Unsicherheitsbetrachtung der Kennlinie ermittelt und berücksichtigt werden.

In allen andern Fällen müssen mehr Stützstellen bekannt sein als freie Parameter gesucht werden. Bei Kalibrierungen im Vergleichsverfahren ist im Normalfall (o.g. Voraussetzungen sind nicht erfüllt) die Anzahl der Freiheitsgrade  $\nu \geq 2$  zu setzen.

Weiterführende Informationen zur Wahl der Stützstellen (→ 2.4) und den resultierenden Unsicherheiten (→ 2.3) sind im Kapitel „Grundlagen“ erläutert.

	Bestimmung von Thermometerkennlinien <a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	27/53

#### 4.5 Ermittlung einer geeigneten Kennlinienbeschreibung

Die Entscheidung, welche Approximationsgleichung verwendet wird, hängt primär von der gewünschten Messunsicherheit und dem geforderten Temperaturbereich ab. Da die Bedingung für die Anzahl der Freiheitsgrade  $\nu \geq 2$ , abgesehen von Ausnahmen ( $\rightarrow$  4.4), erfüllt sein muss, wird die Zahl der freien Parameter bzw. die Ordnung der Approximationsgleichung aufgrund einer begrenzten Anzahl von Messwerte (Stützstellen) eingeschränkt. Dies wird vor allem für den Fall einer Fixpunktkalibrierung relevant.

Bei einer Kalibrierung nach dem Vergleichsverfahren sollten Überlegungen zur gewünschten Messunsicherheit immer vor Beginn der Kalibrierung erfolgen. Nur so können geeignete Kalibrierpunkte (Anzahl und Anordnung) für die gewünschte Approximationsgleichung ausgewählt werden.

Einzelheiten zur Auswahl einer geeigneten Gleichung sind in Abschnitt 4.1 zu finden. Geeignete Approximationsgleichungen werden in Abschnitt 6.1 behandelt. Die mathematischen Grundlagen befinden sich im Abschnitt 2.3.

In Anhang 6.1.2 sind für verschiedene Fälle gebräuchliche Approximationsgleichungen vorgeschlagen. Geeignete Gleichungen können auch mit kommerzieller Mathematik- bzw. spezieller Approximationssoftware ermittelt werden ( $\rightarrow$  2.5).

#### 4.6 Rechenverfahren

Die Softwareauswahl erfolgt gemäß Abschnitt 2.5.

Alle in Anhang 6.1.2 aufgeführten Approximationsgleichungen lassen sich auf ein Gauß-Polynom zurückführen, welches mit Hilfe einer Matrixgleichung gelöst werden kann. Stellvertretend ist das Gleichungssystem für das Polynom 2. Ordnung in Anhang 6.3.1 aufgestellt.

##### 4.6.1 Test des Rechenverfahrens

Nach jeder durchgeführten Approximation sollten die Messwerte in die resultierende Funktion eingesetzt werden und mit den Ausgangsdaten verglichen werden, um sowohl Rechen- wie auch Mess- und Übertragungsfehler ausschließen und ggf. erkennen zu können.

Unabhängig davon müssen neue Rechenverfahren oder Software einem grundlegenden Test unterzogen werden. Allgemeines hierzu ist in den Kapiteln 2.5 und 6.2, spezielles zu Thermoelementen in 6.2.2 zu finden.

## 5 Sonstige Thermometer

### 5.1 Thermistoren

Thermistoren sind Halbleiter Keramikwiderstände. Für thermometrische Messaufgaben sind vorwiegend die Typen mit negativem Temperaturkoeffizienten (Heißleiter, NTC-Widerstände) geeignet. Diese Thermistortypen werden hauptsächlich im Temperaturbereich zwischen  $-100\text{ °C}$  bis maximal  $300\text{ °C}$  eingesetzt.

Die angenähert exponentielle Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur wird durch Kennlinien angegeben für deren Verlauf gilt:

$$R_T = R_{T_0} \exp\left(\frac{\beta(T_0 - T)}{T \cdot T_0}\right) \quad (5-1)$$

mit

- $T$  Temperatur in K
- $T_0$  Bezugstemperatur in K
- $R_T$  Widerstand bei der Temperatur  $T$
- $R_{T_0}$  Widerstand bei der Bezugstemperatur  $T_0$
- $\beta$  Konstante (form- und werkstoffabhängig) in K

Für die Abhängigkeit der Temperatur vom Widerstand  $T = f(R)$  gilt analog:

$$T = \left[ \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{R_T}{R_{T_0}}\right) + \frac{1}{T_0} \right]^{-1} \quad (5-2)$$

Prinzipiell lässt sich in eingeschränkten Temperaturbereichen (siehe Tabelle 5.1) mittels linearem Zusammenhang zwischen  $\ln R_T$  und  $1/T$  die Kennlinie eines Thermistors approximieren.

Temperaturspanne ( $t \geq 0\text{ °C}$ )	Unsicherheit
10 K	0,01 K
20 K	0,04 K
30 K	0,10 K
40 K	0,20 K
50 K	0,30 K

Tabelle 5.1: Unsicherheiten bei Verwendung der Gleichungen 5-1 und 5-2 [34]

Über größere Temperaturbereiche sind die mit einer solchen linearen Approximation verbundenen Unsicherheiten häufig nicht mehr tolerierbar. Aus diesem Grunde sollte die Abhängigkeit  $\ln R_T = f(1/T)$  mit Polynomen höherer Ordnung approximiert werden. Sehr gute Ergebnisse wurden mit der Verwendung eines Polynoms dritten Grades (Steinhart und Hart Gleichung) erzielt:

$$\frac{1}{T} = a_0 + a_1(\ln R_T) + a_2(\ln R_T)^2 + a_3(\ln R_T)^3 \quad (5-3)$$

bzw.

$$\ln R_T = A_0 + \frac{A_1}{T} + \frac{A_2}{T^2} + \frac{A_3}{T^3} \quad (5-4)$$

Umfangreiche Untersuchungen an 17 verschiedenen Metalloxid-Keramiken im Temperaturbereich zwischen  $-80\text{ °C}$  und  $260\text{ °C}$  und mit Widerständen zwischen  $10\ \Omega$  und  $2\ \text{M}\Omega$  bei  $25\text{ °C}$  wurden von Sapoff et al. durchgeführt [35]. Die Ergebnisse bei Anwendung der Polynome 3. Grades (Gleichungen 5-3 und 5-4) können wie folgt zusammengefasst werden:

Bei Anwendung der Gleichungen 5-3 und 5-4 treten Interpolationsfehler auf, die in der Größenordnung der Messunsicherheit bei der Kalibrierung der Thermistoren liegen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Temperaturspanne von 100 K im Temperaturbereich  $-80\text{ °C} \leq t \leq 260\text{ °C}$
- Temperaturspanne von 150 K im Temperaturbereich  $-60\text{ °C} \leq t \leq 260\text{ °C}$
- Temperaturspanne von 150 K bis 200 K im Temperaturbereich  $0\text{ °C} \leq t \leq 260\text{ °C}$

Da die Gleichungen 5-3 und 5-4 vier unbekannte Parameter besitzen, sind für eine Kalibrierung mindestens vier Messpunkte nötig, um die Werte der Parameter zu bestimmen. Bei nicht genau bekannten Thermistortypen (Normalfall) sind mindestens sechs Messpunkte erforderlich, um die Unsicherheit der resultierenden Kennlinienfunktion nicht unnötig zu erhöhen und das verwendete mathematische Modell überprüfen zu können.

Da bei einer kleinen Temperaturspanne (max. 50 K) die Approximierbarkeit der Thermistorkennlinie besser wird, können in diesem Fall auch fünf Messpunkte ausreichen.

Um Kennlinien (von genau bekannten Thermistortypen) mit weniger als zwei Freiheitsgraden ( $\nu < 2$ ) zu approximieren bzw. zu interpolieren, sollten in der Regel *alle* der folgenden Punkte eingehalten werden:

- der Thermometertyp (gleiche Typenbezeichnung und Bauart) ist aus vorhergehenden Untersuchungen mit zusätzlichen Messpunkten (Freiheitsgrade  $\nu \geq 5$ ) bezüglich der Streuung der Kennlinien mehrerer ( $\geq 10$ ) Thermometerexemplare bekannt; bei einer Temperaturspanne von max. 60 K sind für die Untersuchungen Freiheitsgrade von  $\nu \geq 3$  ausreichend
- die Interpolationsfunktion ist nachweislich geeignet für diesen Thermometertyp und Temperaturbereich, d.h. die Approximierbarkeit der Kennlinien dieses Thermometertyps wurde in früheren Untersuchungen mit zusätzlichen Messpunkten bezüglich der Abweichung zwischen Kennlinienfunktion und Messwerten untersucht
- die Temperaturspanne sollte 100 K nicht überschreiten und muss innerhalb des gründlich untersuchten Temperaturbereiches liegen
- die Stützstellen (Messwerte) sind gleichmäßig über den gesamten Temperaturbereich verteilt
- der Einfluss der Anzahl der Messpunkte auf die Unsicherheit der Kennlinienapproximation muss ermittelt und berücksichtigt werden
- die Messunsicherheit ist dadurch erhöht gegenüber einer Kalibrierung mit zusätzlichen Messpunkten. (Berücksichtigung im Messunsicherheitsbudget!)

Sinngemäß gelten vergleichbare Forderungen, wenn ein individuelles Thermistorexemplar mit  $\nu < 2$  recalibriert wird. Es müssen wieder *alle* Voraussetzungen erfüllt sein:

- das Thermometerexemplar ist aus vorhergehenden Kalibrierungen mit zusätzlichen Messpunkten (Freiheitsgrade  $\nu \geq 3$ ) bekannt; bei einer Temperaturspanne von max. 60 K sind zusätzliche Messpunkte für Freiheitsgrade  $\nu \geq 2$  ausreichend
- die Eignung der Kennlinienfunktion für dieses Thermometerexemplar wurde durch die Kalibrierung(en) mit zusätzlichen Messpunkten bestätigt
- die Temperaturspanne sollte 100 K nicht überschreiten und muss innerhalb des Temperaturbereiches liegen, bei dem die Kalibrierung(en) mit zusätzlichen Messpunkten erfolgte(n)
- die Stützstellen (Messwerte) sind gleichmäßig über den gesamten Temperaturbereich verteilt
- der Einfluss der Anzahl der Messpunkte auf die Unsicherheit der Kennlinienapproximation muss ermittelt und berücksichtigt werden
- die Messunsicherheit ist dadurch erhöht gegenüber einer Kalibrierung mit zusätzlichen Messpunkten. (Berücksichtigung im Messunsicherheitsbudget!)

Approximationen mit weniger als zwei Freiheitsgraden ( $\nu < 2$ ) sollten nur in begründeten Ausnahmefällen durchgeführt werden.

Der Kalibrieraufwand kann jedoch auch für weniger gut bekannte Thermistortypen reduziert werden, wenn auf die quadratischen Terme in den o.g. Gleichungen verzichtet wird. Sapoff und Siwek [36] untersuchten die Genauigkeiten der Kennlinie, die mit den vereinfachten Gleichungen 5-5 und 5-6 zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Temperatur und Widerstand erreicht werden können.


$$\frac{1}{T} = b_0 + b_1[\ln R_T] + b_3[\ln R_T]^3 \quad (5-5)$$

$$\ln R_T = B_0 + \frac{B_1}{T} + \frac{B_3}{T^3} \quad (5-6)$$

Der Unsicherheitsbeitrag verursacht durch die Approximation der Kennlinie unter Verwendung der Gleichungen 5-5 und 5-6 wird, wie in Tabelle 5.2 zusammengefasst, abgeschätzt [34].

Temperaturspanne	Temperaturbereich	Unsicherheit
50 K	$0\text{ °C} \leq t \leq 260\text{ °C}$	0,001 K bis 0,003 K
50 K	$-80\text{ °C} \leq t \leq 0\text{ °C}$	0,01 K bis 0,02 K
100 K	$0\text{ °C} \leq t \leq 260\text{ °C}$	0,01 K
100 K	$-80\text{ °C} \leq t \leq 25\text{ °C}$	0,02 K bis 0,03 K
150 K	$50\text{ °C} \leq t \leq 200\text{ °C}$	0,015 K
150 K	$0\text{ °C} \leq t \leq 150\text{ °C}$	0,045 K
150 K	$-60\text{ °C} \leq t \leq 90\text{ °C}$	0,1 K
200 K	$0\text{ °C} \leq t \leq 200\text{ °C}$	0,08 K

Tabelle 5.2: Unsicherheiten bei der Verwendung der Gleichungen 5-5 und 5-6

	Bestimmung von Thermometerkennlinien <a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	31/53

Da die Nichtlinearität des Zusammenhangs  $\ln R_T = f(1/T)$  neben dem verwendeten Temperaturbereich auch von den Materialeigenschaften des Thermistors abhängt, sind die angeführten Unsicherheiten lediglich als Abschätzungen des durch die Approximation der Kennlinie verursachten Unsicherheitsbeitrages zu verwenden.

Die eingesetzte Software oder das Rechenverfahren zur Berechnung der Koeffizienten der oben angegebenen Gleichungen (5-3 und 5-5) sollte vor der Freigabe grundlegenden Test unterzogen werden. Hierfür sind im Anhang 6.2.3 fiktive Messwerte angegeben. Nach Approximation dieser Werte kann das Ergebnis mit den im gleichen Abschnitt angegebenen Ergebnissen verglichen werden.

Unabhängig davon sollten nach jeder Approximation für eine Kalibrierung die Messwerte wieder in die resultierende Funktion eingesetzt und mit den Ausgangsdaten verglichen werden, um sowohl Rechen- wie auch Mess- und Übertragungsfehler ausschließen und ggf. erkennen zu können.

## 5.2 Flüssigkeitsglasthermometer

Die Linearität der Anzeige eines Flüssigkeitsglasthermometers ist weitgehend von der Querschnittsfläche der Thermometerkapillare und deren Veränderung über die Länge des Thermometers abhängig. Eine nichtlineare Ausdehnung der Thermometerflüssigkeit kann ebenso zur Nichtlinearität der Thermometeranzeige beitragen, dies sollte jedoch in der Skalenteilung bereits berücksichtigt sein, da das Verhalten der üblichen Thermometerflüssigkeiten (Quecksilber und Alkohol) gut bekannt ist.

Die Änderung der Querschnittsfläche der Thermometerkapillare folgt keinen Gesetzmäßigkeiten, die approximierbar sind. Eine Interpolation zwischen den Messpunkten erfolgt deshalb in der Regel nicht.

Ein möglicher Ansatz ist allerdings die abschnittsweise lineare Interpolation zwischen den Messpunkten. Siehe hierzu auch Kapitel 2.2.1.

Im Normalfall werden für Flüssigkeitsglasthermometer jedoch keine Kennlinien approximiert.


Näheres zur Behandlung von Flüssigkeitsglasthermometern ist in der entsprechenden PTB-Prüfregel [13] zu finden.

## 5.3 Direktanzeigende elektronische Thermometer

Direktanzeigende Thermometer mit elektronischer (i. Allg. digitaler) Anzeiger bestehen aus einem Sensorelement (z.B. Pt-100, Thermoelement, Thermistor, Dioden-, Transistor-, Bandabstands-, Schwingquarz-(QuaT)-Sensor) und einer Mess- und Anzeigeelektronik. Die Elektronik linearisiert die Kennlinie des entsprechenden Sensors und führt zu einer direkten Anzeige der Sensortemperatur. Eine (zusätzliche) Linearisierung der Sensorkennlinie vom Anwender ist in erster Näherung nicht nötig.

Es entstehen jedoch Fehler, die durch eine ungenügende Beschreibung der Kennlinie durch die Elektronik verursacht werden. Da die von der Elektronik verwendete Kennlinie in den meisten Fällen nicht bekannt ist, kann vom Nutzer keine sensorbasierte Kennlinie angewendet werden, da eine Rückrechnung zu den eigentlichen Messwerten des Sensors nicht möglich ist.

Stattdessen kann versucht werden die Anzeigewerte durch abschnittsweise lineare Interpolation zwischen den Messpunkten zu korrigieren (→2.2.1, Polygoninterpolation). Im Normalfall

	Bestimmung von Thermometerkennlinien <a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	32/53

werden für direktanzeigende elektronische Thermometer jedoch keine Kennlinien approximiert.

## 6 Anhang

### 6.1 Empfohlene Approximationsgleichungen

Die folgenden Unterkapitel 6.1.1 bis 6.1.2 bieten für weit verbreitete Thermometertypen gängige Approximationsgleichungen an. Die angegebenen zu erwartenden Messunsicherheiten beziehen sich nur auf die Eigenschaften der resultierenden Funktion - die das Thermometerverhalten beschreibt - im Vergleich zur realen Kennlinie des jeweiligen Thermometers. Die eigentlichen Messfehler (d.h. Messabweichungen) müssen gesondert berücksichtigt werden.

Bei Messfehlern, die als näherungsweise zufällig angenommen werden, sind die Auswirkungen auf die resultierende Funktion um so geringer, je mehr Messpunkte vorliegen. Die approximierende Funktion wirkt hierbei ausgleichend (→ 2.2.2). Ausnahmen bilden die Bereichsgrenzen der Kalibrierung, wo der Einfluss von Messfehlern wächst.

Den Anteil der Unsicherheit der Kennlinienfunktion, der durch Messfehler (abweichungsbehaftete Stützstellen) verursacht wird, kann man bei der Kontrolle der berechneten Koeffizienten (→ 3.6.1) mit Hilfe von „worst-case Simulationen“ (Variation der Messwerte im Bereich der Messunsicherheit) abschätzen. Dieser Anteil beschreibt somit den Einfluss der Messfehler zwischen den Stützstellen. Ursache hierfür ist unter anderem auch die Fortpflanzung (und ggf. Verstärkung) der Messunsicherheit einzelner Messpunkte auf die gesamte Kennlinienfunktion. Der Anteil ist (und kann) in den Unsicherheitstabellen in den folgenden Unterkapiteln nicht berücksichtigt (werden).

Im allgemeinen ist dieser Unsicherheitsanteil vernachlässigbar gegenüber den eigentlichen Messunsicherheiten der Kalibrierpunkte, wenn eine sinnvolle Approximationsgleichung verwendet wird, sowie die Anordnung und Anzahl der Stützstellen gemäß dieser Richtlinie gewählt wurden.


Zusammenfassend gibt es also drei Unsicherheitskomponenten, die zur Gesamtunsicherheit der approximierten Kennlinie eines Thermometers führen:

- die eigentlichen Messunsicherheiten der Kalibrierpunkte,
- den durch die Fortpflanzung der Messfehler verursachten Kennlinienfehler,
- und den Fehler des mathematischen Modells - also die Abweichung zwischen berechneter und tatsächlicher Thermometerkennlinie, für den Fall einer idealen Messung.

Nur der Fehler des mathematischen Modells wird in Kapitel 6.1.1 behandelt und abgeschätzt.

Alle drei Einflüsse sind teilweise miteinander korreliert, somit kann die Gesamtunsicherheit nur in erster Näherung durch eine quadratische Summenbildung ermittelt werden. Weiterführende Informationen sind in Kapitel 2.3.2 zu finden.



	<p style="text-align: center;">Bestimmung von Thermometerkennlinien</p> <p style="text-align: center;"><a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a></p>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	33/53

### 6.1.1 Empfohlene Approximationsgleichungen für Pt-100

In den folgenden Tabellen sind für verschiedene Temperaturbereiche die empfohlenen Approximationsgleichungen der Pt-100-Kennlinie mit den, als typisch abgeschätzten, Fehlerintervallen aufgeführt. Angegeben ist die Halbbreite des jew. Fehlerintervalls. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist rechteckig. Das Fehlerintervall bezieht sich nur auf die Approximation, also die Güte des jeweiligen mathematischen Modells, und keine weiteren Unsicherheitskomponenten.


Die angegebenen Grenzen wurden sowohl aus praktischen Messungen als auch aus mathematisch theoretischen Überlegungen gewonnen. Bei Thermometern, die sich untypisch für ein Pt-100 verhalten oder sehr instabil sind, kann eine Approximation u. U. mit deutlich größeren Abweichungen behaftet sein.

Zusätzlich gelten die in Abschnitt 3.2 bis 3.4 geforderten Randbedingungen.

Die Angaben zu den Gleichungen 6.1.1-5 bis 6.1.1-7 sind Näherungswerte, da sie nur aus praktischen Messungen ermittelt werden konnten, welche immer auch mit einer Messunsicherheit behaftet sind und deren verwendete Thermometertypen nicht unbedingt repräsentativ sein müssen.

Die grau gefärbten Zellen der Tabellen sind für den entsprechenden Temperaturbereich nicht sinnvolle Approximationsgleichungen, da die Anzahl der Parameter (bzw. Ordnung) unnötig hoch wäre. Die üblicherweise erreichbare Messunsicherheit der Kalibrierung stünde einer weiteren Reduzierung der Gesamtmessunsicherheit, bei Verwendung der entsprechenden Gleichungen, entgegen.

Speziell bei Berechnungen ohne Freiheitsgrad ( $\nu = 0$ , Tabelle 6.2) besteht bei diesen Temperaturbereichen und Gleichungen auch die Gefahr von Polynomüberschwingern und überproportional großen Abweichungen von der realen Thermometerkennlinie. Da hier prinzipiell keine zusätzlichen Messwerte für die Kontrolle der Kennlinienfunktion zur Verfügung stehen, würden die genannten Abweichungen in aller Regel nicht erkannt werden.

	Bestimmung von Thermometerkennlinien		DKD-R 5-6	
	<a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>		Ausgabe:	09/2018
			Revision:	0
			Seite:	34/53

Freiheitsgrade  $\nu \geq 2$

Temperaturbereich	-190 bis 600 °C	-80 bis 200 °C	-80 bis 600 °C	-40 bis 0 °C	-40 bis 200 °C	-40 bis 400 °C	0 bis 50 °C	0 bis 100 °C	0 bis 200 °C	0 bis 400 °C	0 bis 600 °C
<b>Gl. 6.1.1-1</b> <b>CvD</b>	40 mK	6 mK	40 mK	< 1 mK	5 mK	25 mK	< 1 mK	< 1 mK	4 mK	25 mK	40 mK
<b>Gl. 6.1.1-2</b> <b>2. Ord</b>	1,3 K	40 mK	120 mK	< 1 mK	10 mK	40 mK					
<b>Gl. 6.1.1-3</b> <b>3. Ord</b>	0,8 K	20 mK	70 mK		1 mK	5 mK			< 1 mK	4 mK	40 mK
<b>Gl. 6.1.1-4</b> <b>4. Ord</b>	0,4 K	10 mK	15 mK			2 mK				1 mK	5 mK
<b>Gl. 6.1.1-5</b> <b>ITS+1.Ord</b>	<sup>5</sup>	( $\approx 60$ mK) <sup>5</sup>	( $\approx 100$ mK) <sup>5</sup>		< 5 mK	< 10 mK				< 10 mK	< 60 mK
<b>Gl. 6.1.1-6</b> <b>ITS+2.Ord</b>	<sup>5</sup>	( $\approx 15$ mK) <sup>5</sup>	( $\approx 20$ mK) <sup>5</sup>			< 5 mK				< 5 mK	< 10 mK
<b>Gl. 6.1.1-7</b> <b>ITS+3.Ord</b>	<sup>5</sup>		( $\approx 15$ mK) <sup>5</sup>								

Tabelle 6.1: Typische Fehlerintervalle des Unsicherheitsbeitrags der Kennlinienapproximation von Pt-100 ( $\nu = 2$ )

Freiheitsgrade  $\nu = 0$

Temperaturbereich	-190 bis 600 °C	-80 bis 200 °C	-80 bis 600 °C	-40 bis 0 °C	-40 bis 200 °C	-40 bis 400 °C	0 bis 50 °C	0 bis 100 °C	0 bis 200 °C	0 bis 400 °C	0 bis 600 °C
<b>Gl. 6.1.1-1</b> <b>CvD</b>				< 1 mK	< 10 mK		< 1 mK	< 2 mK	< 8 mK		
<b>Gl. 6.1.1-2</b> <b>2. Ord</b>				< 1 mK	< 20 mK						
<b>Gl. 6.1.1-3</b> <b>3. Ord</b>					< 2 mK				< 1 mK		
<b>Gl. 6.1.1-4</b> <b>4. Ord</b>											

Tabelle 6.2: Typische Fehlerintervalle des Unsicherheitsbeitrags der Kennlinienapproximation von Pt-100 ( $\nu = 0$ )

<sup>5</sup> Abschätzung bzw. Aussage zzt. nicht möglich, da zur Ermittlung ausreichend Messdaten nicht vorliegen.  
Graue Felder: Entsprechende Gleichungen sind für diese Temperaturbereiche nicht sinnvoll.

- Gl. 6.1.1-1 Callendar-van-Dusen (CvD):**  
 $R = R_0 \cdot (1 + At + Bt^2 + C(t-100 \text{ °C})t^3) \mid C = 0 \text{ für } t > 0 \text{ °C}$
- Gl. 6.1.1-2 2. Ord:**  $R = R_0 \cdot (1 + at + bt^2)$
- Gl. 6.1.1-3 3. Ord:**  $R = R_0 \cdot (1 + at + bt^2 + ct^3)$
- Gl. 6.1.1-4 4. Ord:**  $R = R_0 \cdot (1 + at + bt^2 + ct^3 + dt^4)$
- Gl. 6.1.1-5 ITS + 1. Ord:**  $W(t) = W_r(t) + a(W(t)-1)$
- Gl. 6.1.1-6 ITS + 2. Ord:**  $W(t) = W_r(t) + a(W(t)-1) + b(W(t)-1)^2$
- Gl. 6.1.1-7 ITS + 3. Ord:**  $W(t) = W_r(t) + a(W(t)-1) + b(W(t)-1)^2 + c(W(t)-1)^3$

Erforderliche Kalibrierpunktzahl siehe Tabelle 3.1 in Abschnitt 3.4.1.

### 6.1.2 Empfohlene Approximationsgleichungen für Thermoelemente

Standard-Polynom  $m$ -ter Ordnung:

$$E(t) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot t^i \quad \text{mit } m \in \{2..6\}$$

für Kalibrierungen inkl. Eispunktmessung (0 °C), z.B. zur Berücksichtigung thermoelektrischer Inhomogenität bei Raumtemperatur.

Erforderliche Kalibrierpunktzahl  $N$  (inkl. Eispunktmessung):  $N \geq m + 3$

Standard-Polynom  $m$ -ter Ordnung:

$$E(t) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot t^i \quad \text{mit } m \in \{2..6\}$$

für Kalibrierungen ohne Eispunktmessung (0 °C).

Erforderliche Kalibrierpunktzahl  $N \geq m + 2$

Abweichungspolynom  $m$ -ter Ordnung:

$$E(t) = E_r(t) + \sum_{i=0}^m a_i \cdot t^i \quad \text{mit } m \in \{1..3\}$$

für Kalibrierungen inkl. Eispunktmessung (0 °C), z.B. zur Berücksichtigung thermoelektrischer Inhomogenität bei Raumtemperatur.

Wobei  $E_r(t)$  die Referenzthermospannung des jeweiligen Thermoelementtyps bei der Temperatur  $t$  ist.

Erforderliche Kalibrierpunktzahl  $N$  (inkl. Eispunktmessung):  $N \geq m + 3$


Abweichungspolynom  $m$ -ter Ordnung:

$$E(t) = E_r(t) + \sum_{i=1}^m a_i \cdot t^i \quad \text{mit } m \in \{1..3\}$$

für Kalibrierungen ohne Eispunktmessung (0 °C).

Wobei  $E_r(t)$  die Referenzthermospannung des jeweiligen Thermoelementtyps bei der Temperatur  $t$  ist.

Erforderliche Kalibrierpunktzahl  $N \geq m + 2$

	Bestimmung von Thermometerkennlinien <a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	36/53

Im Falle der Verwendung von Standardpolynomen zur Bestimmung der Kennlinie kann die Unsicherheit der Approximation gleichzeitig auch als Unsicherheit der ermittelten Kennlinie betrachtet werden. Bei der Verwendung von Abweichungspolynomen von den jeweiligen Referenzkennlinien ist bei der Bestimmung der individuellen Kennlinien für das zu kalibrierende Thermoelement zusätzlich die Unsicherheit der Referenzkennlinien bezüglich der ITS-90 zu berücksichtigen. Dieser Unsicherheitsbeitrag kann aus der Unsicherheit der entsprechenden Messungen (oder Berechnungen) zu ihrer Bestimmung abgeschätzt werden. Er liegt für Typ S und R Thermoelemente bis ca. 1000 °C im Bereich einiger mK. Bei höheren Temperaturen und für Typ B Thermoelemente entspricht er näherungsweise den Temperaturdifferenzen zwischen den Temperaturskalen IPTS-68 und ITS-90.

## 6.2 Testdatensätze

Vor der Freigabe eines selbst erstellten Rechenverfahrens oder einer Software (gleich ob selbst erstellt oder als Standardsoftware erworben) für den konkreten Fall der Kalibrierung von Thermometern (Pt-100, Thermoelemente, NTCs usw.) und/oder der anschließenden Approximation der Kennlinien muss diese Software bzw. dieses Verfahren auf Funktionstüchtigkeit getestet werden.

Dies kann durch Ergebnisvergleich bei Nutzung verschiedener Programme bzw. Rechenverfahren geschehen. Wichtig ist hierbei, nicht die Koeffizienten der approximierten Gleichung miteinander zu vergleichen, sondern nur die resultierenden Funktionen. Aufgrund von verschiedenen Algorithmen und unterschiedlicher Rechengenauigkeit können unterschiedliche Koeffizienten auftreten, welche sich jedoch gegenseitig kompensieren und so zu näherungsweise identischen Kurvenverläufen führen.

Zur Überprüfung der Software oder des Approximationsverfahren sind in den Unterkapiteln 6.2.1 bis 6.2.3 Testdatensätze angegeben. Eine Approximation auf Grundlage dieser Daten sollte zu einem vergleichbaren Funktionsverlauf führen wie die Kennlinie auf Basis der dort ebenfalls aufgeführten Koeffizienten.

Eine Übereinstimmung innerhalb von 10% der in Anhang 6.1 angegebenen Fehlerintervalle bzw. Unsicherheiten kann für die Praxis als ausreichend angesehen werden.

### 6.2.1 Testdatensatz für Pt-100

Um die Software oder das Approximationsverfahren zu überprüfen, ist in der folgenden Tabelle 6.3 ein Testdatensatz (fiktive Kalibrierung eines Pt-100) angegeben. Eine Approximation auf Grundlage dieser Daten mit den Gleichungen 6.1.1-1 bis 6.1.1-7 sollte zu einem vergleichbaren Funktionsverlauf der Kennlinie auf Basis der in Tabelle 6.4 bis Tabelle 6.7, sowie Tabelle 6.9 und Tabelle 6.10, angegebenen Koeffizienten führen.

Falls bereits die groß gedruckten Ziffern der Koeffizienten aus den Tabellen in Kapitel 6.2.1.1 bis 6.2.1.3 mit den Berechnungen der zu testenden Software identisch sind, so stimmen beide Ergebnisse auf wenige 0,1 mK oder besser überein und es kann in den meisten Fällen auf den Vergleich der Kurvenverläufe verzichtet werden.

Temperatur in °C	Widerstand in Ω	Messunsicherheit ( $k = 2$ )		Wichtungsfaktor	
		in mΩ	entspr. in mK	(in mΩ <sup>-2</sup> )	normiert
0,010	100,0054	4,0	10	0,0625	1,591981
417,765	253,3138	10,0	25	0,01	0,254717
303,988	213,5463	10,0	25	0,01	0,254717
200,000	175,9075	6,0	15	0,0277778	0,707547
80,008	130,9283	4,0	10	0,0625	1,591981
0,010	100,0047	4,0	10	0,0625	1,591981
-51,275	79,7726	6,0	15	0,0277778	0,707547
-25,714	89,8977	6,0	15	0,0277778	0,707547
0,010	100,0045	4,0	10	0,0625	1,591981

Tabelle 6.3: Testdatensatz für Pt-100

Die Wichtungsfaktoren sind nach Gleichung (2-2) berechnet. Die *normierten* Wichtungsfaktoren sind so berechnet, dass ihre Summe der Anzahl der Datenpaare entspricht. Die Ergebnisse sind dadurch statistisch besser mit den ungewichteten Ergebnissen vergleichbar (z.B. Anzahl der effektiven Freiheitsgrade, Standardunsicherheit usw.). Auf die eigentlichen Koeffizienten und damit den Kurvenverlauf hat die Normierung der Wichtungsfaktoren keinen Einfluss.

#### 6.2.1.1 Ungewichtete Messwerte

Alle Messwerte (inkl. die  $R_{0,01}$ -Werte<sup>6</sup>) wurden für die Standard-Polynome (Gleichungen 6.1.1-2 bis 6.1.1-4) mit dem Least-Square-Fit-Verfahren approximiert. Eine *W*-Wert-Bildung wurde nicht durchgeführt. Alle Werte wurden gleich gewichtet.

Es ergeben sich die folgenden Koeffizienten:

	Polynom 2. Ord (Gleichung 6.1.1-2)	Polynom 3. Ord (Gleichung 6.1.1-3)	Polynom 4. Ord (Gleichung 6.1.1-4)	Einheit
$R_0$	99,995516119	99,999381848	100,000751561	Ω
$a$	3,9117908987E-03	3,9135250878E-03	3,9136086594E-03	°C <sup>-1</sup>
$b$	-5,7880716086E-07	-5,9617124471E-07	-6,0537905213E-07	°C <sup>-2</sup>
$c$		3,1212478437E-11	8,3204212690E-11	°C <sup>-3</sup>
$d$			-7,4250861722E-14	°C <sup>-4</sup>

Tabelle 6.4: Koeffizienten für Standard-Polynome aus den Testdaten (ungewichtet)

Entsprechend folgen die Koeffizienten für die Callendar-van-Dusen-Gleichung, die nach dem oben beschriebenen Verfahren approximiert sind. Positive, negative und  $R_{0,01}$ -Werte sind

<sup>6</sup> Achtung: Die  $R_{0,01}$ -Werte (aus Tabelle 6.3) sind Messdaten, die  $R_0$ -Werte (aus Tabelle 6.4 ff.) jedoch Koeffizienten (Rechenwerte).

gleichberechtigt berücksichtigt und in einem Schritt approximiert worden. Die Werte sind nicht unterschiedlich gewichtet.

	<b>Callendar-van-Dusen</b> (Gleichung 6.1.1-1)	<b>Einheit</b>
$R_0$	100,000443911	$\Omega$
$A$	3,9107762809E-03	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
$B$	-5,7693522900E-07	$^{\circ}\text{C}^{-2}$
$C$	-1,1855984344E-11	$^{\circ}\text{C}^{-4}$

*Tabelle 6.5: Koeffizienten der Callendar-van-Dusen-Gleichung aus den Testdaten (ungewichtet)*

#### 6.2.1.2 Gewichtete Messwerte

Im Unterschied zum vorigen Kapitel wird hier die Messunsicherheit der Werte berücksichtigt und eine Wichtung der Messwerte gemäß Abschnitt 2.2.2 / Gleichung (2-2) durchgeführt. Ansonsten sind die Berechnungen nach dem im Kapitel 6.2.1.1 beschriebenen Verfahren durchgeführt.

Für die Standard-Polynome (Gleichungen 6.1.1-2 bis 6.1.1-4) ergeben sich bei gewichteten Messwerten die folgenden Koeffizienten:

	<b>Polynom 2. Ord</b> (Gleichung 6.1.1-2)	<b>Polynom 3. Ord</b> (Gleichung 6.1.1-3)	<b>Polynom 4. Ord</b> (Gleichung 6.1.1-4)	<b>Einheit</b>
$R_0$	99,998008247	99,999914018	100,000805602	$\Omega$
$a$	3,9120434880E-03	3,9134693887E-03	3,9135562623E-03	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
$b$	-5,8008948879E-07	-5,9704124207E-07	-6,0599486783E-07	$^{\circ}\text{C}^{-2}$
$c$		3,3545043917E-11	8,9273621082E-11	$^{\circ}\text{C}^{-3}$
$d$			-8,4635350764E-14	$^{\circ}\text{C}^{-4}$

*Tabelle 6.6: Koeffizienten für Standard-Polynome aus den Testdaten (gewichtet)*

Für die Callendar-van-Dusen-Gleichung (Gleichung 6.1.1-1) ergeben sich bei gewichteten Messwerten die folgenden Koeffizienten:

	<b>Callendar-van-Dusen</b> (Gleichung 6.1.1-1)	<b>Einheit</b>
$R_0$	100,000923150	$\Omega$
$A$	3,9111868772E-03	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
$B$	-5,7817938946E-07	$^{\circ}\text{C}^{-2}$
$C$	-1,0825644340E-11	$^{\circ}\text{C}^{-4}$

*Tabelle 6.7: Koeffizienten der Callendar-van-Dusen-Gleichung aus den Testdaten (gewichtet)*

Die klein gedruckten Ziffern haben bei der Berechnung des Widerstands einen Einfluss von weniger als 0,1 mK des Temperaturäquivalents. Sie brauchen normalerweise nicht angegeben werden, sind hier aber wegen der besseren Vergleichbarkeit aufgeführt. Die erforderliche Stellenzahl hängt auch vom Temperaturbereich des Thermometers und dem Exponenten des Koeffizienten ab, ist also bei verschiedenen Thermometern nicht unbedingt identisch. Die Angaben hier beziehen sich auf den Temperaturbereich des Testdatensatzes.

### 6.2.1.3 Abweichungsfunktion mit $W$ -Werten

Angelehnt an die Mathematik der ITS-90 kann auch die Abweichung zur ITS-90-Referenzfunktion approximiert werden. Dies ist jedoch *keine* ITS-90-Kalibrierung [18], da bei industriellen Pt-100-Sensoren das Kriterium für  $W_{Ga}$  oder  $W_{Hg}$  (siehe auch Abschnitt 3.1.3 und [19]) nicht eingehalten wird und die Kalibrierung normalerweise auch nicht bei den Temperaturen der ITS-90-Fixpunkte erfolgt.

Dennoch ist das mathematische Verfahren häufig auch für Pt-100 geeignet, um mit relativ wenigen Kalibrierpunkten das Thermometerverhalten über große Temperaturbereiche mit verhältnismäßig kleinen Unsicherheiten zu beschreiben.

Die Bestimmung der Koeffizienten der Gleichungen 6.1.1-5 bis 6.1.1-7 erfolgt durch Transformation der Gleichung

$$\Delta W(W(T_{90})) = W(T_{90}) - W_r(T_{90}) = a \cdot [W(T_{90}) - 1] + b \cdot [W(T_{90}) - 1]^2 + c \cdot [W(T_{90}) - 1]^3 \quad (6.2.1-1)$$

mit  $W(T_{90}) = R(T_{90})/R(0,01 \text{ }^\circ\text{C})$   
 $R(T_{90})$ : Thermometerwiderstand bei der Temperatur  $T_{90}$   
 $R(0,01 \text{ }^\circ\text{C})$ : Thermometerwiderstand bei der Temperatur  $0,01 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $W_r(T_{90})$ :  $W$ -Wert der ITS-90-Referenzfunktion bei der Temperatur  $T_{90}$  ( $\rightarrow$  [18])

in die Form

$$y = a \cdot x + b \cdot x^2 + c \cdot x^3. \quad (6.2.1-2)$$

Je nach gewünschter Gleichung (6.1.1-5 bis 6.1.1-7) können die Koeffizienten  $b$  und/oder  $c$  zu Null gesetzt werden.

Die Koeffizienten der transformierten Form sind so mit jeder gängigen Approximationssoftware zu berechnen.


Vor der eigentlichen Approximation werden die Widerstandswerte in  $W$ -Werte umgerechnet. Dazu wird jeder Widerstandswert durch den zugehörigen Widerstandswert am Tripelpunkt des Wassers dividiert. Je öfter der Wassertripelpunkt gemessen wird – im Idealfall nach jedem anderen Kalibrierpunkt – umso genauer ist dieses Verfahren. Es ist klar, dass dies in der industriellen Praxis selten der Fall sein wird, entsprechend ausgelegt ist auch der Testdatensatz ( $\rightarrow$  Tabelle 6.3).

In diesem Beispiel wird für die  $W$ -Wert Berechnung die jeweils folgende Wassertripelpunkt-Messung herangezogen. Die Formeln für die Berechnung von  $W_r$  der ITS-90 sind [18] zu entnehmen.

$T_{90}$ in $^\circ\text{C}$	$W(T_{90})$	$W(T_{90}) - 1$ ( $x$ )	$W_r(T_{90})$	$W(T_{90}) - W_r(T_{90})$ ( $y$ )
417,765	2,5330189481	1,5330189481	2,5627566505	-0,0297377024
303,988	2,1353626380	1,1353626380	2,1573226787	-0,0219600407
200,000	1,7589923274	0,7589923274	1,7736633068	-0,0146709794
80,008	1,3092214666	0,3092214666	1,3152020735	-0,0059806069
-51,275	0,7976901039	-0,2023098961	0,7938191079	0,0038709960
-25,714	0,8989365479	-0,1010634521	0,8969957508	0,0019407970

Tabelle 6.8: Transformierter Testdatensatz mit  $W$ -Werten für Pt-100

Die Messpunkte bei  $0,01 \text{ }^\circ\text{C}$  entfallen, da hier die Kennlinie prinzipiell durch den Punkt ( $T_{90} = 0,01 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $W = 1$ ) verlaufen muss.

	Bestimmung von Thermometerkennlinien <a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	40/53

Für die Gleichungen 6.1.1-5 bis 6.1.1-7 ergeben sich die folgenden Koeffizienten, wenn keine Wichtung durchgeführt wird:

	<b>ITS + 1. Ord</b> <i>(Gleichung 6.1.1-5)</i>	<b>ITS + 2. Ord</b> <i>(Gleichung 6.1.1-6)</i>	<b>ITS + 3. Ord</b> <i>(Gleichung 6.1.1-7)</i>	<b>Einheit</b>
<i>a</i>	-1,9368259648E-02	-1,9241321496E-02	-1,9240372859E-02	—
<i>b</i>		-1,0023952445E-04	-1,0254256788E-04	—
<i>c</i>			1,1402911401E-06	—

Tabelle 6.9: Koeffizienten für die ITS-Abweichungsfunktion (ungewichtet)

Werden die transformierten Testdaten aus Tabelle 6.8 mit den Wichtungsfaktoren aus Tabelle 6.3 approximiert, so ergeben sich für die Gleichungen 6.1.1-5 bis 6.1.1-7 die folgenden Koeffizienten:

	<b>ITS + 1. Ord</b> <i>(Gleichung 6.1.1-5)</i>	<b>ITS + 2. Ord</b> <i>(Gleichung 6.1.1-6)</i>	<b>ITS + 3. Ord</b> <i>(Gleichung 6.1.1-7)</i>	<b>Einheit</b>
<i>a</i>	-1,9355977513E-02	-1,9266959203E-02	-1,9257654779E-02	—
<i>b</i>		-8,2649269755E-05	-1,1036006940E-04	—
<i>c</i>			1,5035448679E-05	—

Tabelle 6.10: Koeffizienten für die ITS-Abweichungsfunktion (gewichtet)

Um mit Hilfe von Gleichung 6.2.1-1 und den ermittelten Koeffizienten die Temperatur aus einem  $W$ -Wert zu berechnen, ist mit

$$W_r(T_{90}) = W(T_{90}) - a \cdot [W(T_{90}) - 1] - b \cdot [W(T_{90}) - 1]^2 - c \cdot [W(T_{90}) - 1]^3 \quad (6.2.1-3)$$

der Wert der ITS-90-Referenzfunktion  $W_r(T_{90})$  zu berechnen.

Mit Hilfe der *inversen* Referenzfunktion aus [18] kann hieraus die gesuchte Temperatur  $T_{90}$  bestimmt werden.

Zur Bestimmung des Wertes  $W(T_{90})$  kann eine schnell konvergierende Näherungslösung verwendet werden:

- 1)  $W^*(T_{90}) := W_r(T_{90})$
- 2)  $W^*(T_{90}) := W_r(T_{90}) + a \cdot [W^*(T_{90}) - 1] + b \cdot [W^*(T_{90}) - 1]^2 + c \cdot [W^*(T_{90}) - 1]^3$
- 3) Schritt 2 so oft wiederholen, bis die Änderung von  $W^*(T_{90})$  vernachlässigt werden kann.
- 4)  $W(T_{90}) \approx W^*(T_{90})$

Typischerweise sind nicht mehr als 5 Iterationsschritte erforderlich.

#### 6.2.1.4 Tabellenwerte der approximierten Testdaten

Zur stichpunktartigen Überprüfung der Berechnungsverfahren von Temperatur nach Widerstand (bzw.  $W$ -Wert) und umgekehrt sind mit den oben ermittelten Koeffizienten die entsprechenden Ergebnisse der Umrechnungen dargestellt.

Anhand der Temperaturwerte direkt an den Originaltestdaten ( $\rightarrow$  Tabelle 6.3 bzw. Tabelle 6.8) kann auch die Eignung der mathematischen Modelle für diesen speziellen Fall (Testdatensatz) überprüft werden.

In der folgenden Tabelle wurden aus gegebenen Temperaturen die Widerstandswerte mit Hilfe der Gleichungen 6.1.1-1 bis 6.1.1-4 und den Koeffizienten aus Tabelle 6.4 und Tabelle 6.5 (ungewichtete Approximation) ermittelt.



	Polynom 2. Ord	Polynom 3. Ord	Polynom 4. Ord	CvD
Temperatur in °C	Widerstand in Ω	Widerstand in Ω	Widerstand in Ω	Widerstand in Ω
-50	80,292 74	80,282 45	80,280 13	80,280 01
0	99,995 52	99,999 38	100,000 75	100,000 44
50	119,408 90	119,418 23	119,418 59	119,410 18
100	138,532 89	138,541 34	138,539 33	138,531 44
150	157,367 49	157,371 05	157,367 53	157,364 24
200	175,912 70	175,909 70	175,906 66	175,908 57
250	194,168 52	194,159 63	194,159 06	194,164 42
300	212,134 95	212,123 17	212,125 95	212,131 81
350	229,811 99	229,802 68	229,807 45	229,810 73
400	247,199 64	247,200 50	247,202 56	247,201 18
-51,275	79,786 54	79,775 75	79,773 24	79,771 99
-25,714	89,898 92	89,896 73	89,897 05	89,903 55
0,010	99,999 43	100,003 30	100,004 67	100,004 35
80,008	130,921 08	130,930 49	130,929 42	130,920 61
200,000	175,912 70	175,909 70	175,906 66	175,908 57
303,988	213,555 49	213,543 68	213,546 71	213,552 47
417,765	253,307 79	253,314 56	253,313 73	253,310 56

Tabelle 6.11: Tabellenwerte für Standard-Polynome und CvD (ungewichtet)

In der folgenden Tabelle wurden aus gegebenen Temperaturen die Widerstandswerte mit Hilfe der Gleichungen 6.1.1-1 bis 6.1.1-4 und den Koeffizienten aus Tabelle 6.6 und Tabelle 6.7 (gewichtete Approximation) ermittelt.

	<b>Polynom 2. Ord</b>	<b>Polynom 3. Ord</b>	<b>Polynom 4. Ord</b>	<b>CvD</b>
<b>Temperatur in °C</b>	<b>Widerstand in Ω</b>	<b>Widerstand in Ω</b>	<b>Widerstand in Ω</b>	<b>Widerstand in Ω</b>
-50	80,293 16	80,282 90	80,280 20	80,279 96
0	99,998 01	99,999 91	100,000 81	100,000 92
50	119,412 82	119,418 40	119,418 31	119,412 49
100	138,537 59	138,540 89	138,538 76	138,534 97
150	157,372 32	157,369 88	157,366 97	157,368 35
200	175,917 01	175,907 91	175,906 44	175,912 64
250	194,171 66	194,157 47	194,159 43	194,167 84
300	212,136 27	212,121 10	212,126 93	212,133 95
350	229,810 85	229,801 30	229,808 64	229,810 96
400	247,195 38	247,200 59	247,203 01	247,198 89
-51,275	79,786 90	79,776 20	79,773 30	79,772 04
-25,714	89,900 42	89,897 29	89,897 18	89,903 06
0,01	100,001 92	100,003 83	100,004 72	100,004 83
80,008	130,925 54	130,930 31	130,928 95	130,923 72
200	175,917 01	175,907 91	175,906 44	175,912 64
303,988	213,556 64	213,541 64	213,547 72	213,554 48
417,765	253,302 28	253,315 40	253,313 55	253,307 21

Tabelle 6.12: Tabellenwerte für Standard-Polynome und CvD (gewichtete)

In der folgenden Tabelle wurden aus gegebenen Temperaturen die  $W$ -Werte mit Hilfe der Gleichungen 6.1.1-5 bis 6.1.1-7 und den Koeffizienten aus Tabelle 6.9 (ungewichtete Approximation) ermittelt. Zum Vergleich sind auch die Werte  $W_r(T_{90})$  der ITS-90-Referenzfunktion aufgelistet.

Temperatur in °C	ITS + 1. Ord	ITS + 2. Ord	ITS + 3. Ord	$W_r(T_{90})$
	$W$ -Wert	$W$ -Wert	$W$ -Wert	
-50	0,802 805 47	0,802 777 09	0,802 776 81	0,798 986 16
0	0,999 960 87	0,999 960 86	0,999 960 86	0,999 960 11
50	1,758 963 50	1,759 001 37	1,759 001 27	1,773 663 31
100	1,385 310 03	1,385 343 41	1,385 343 50	1,392 772 81
150	1,573 585 73	1,573 624 81	1,573 624 81	1,584 695 09
200	1,758 963 50	1,759 001 37	1,759 001 27	1,773 663 31
250	1,941 469 36	1,941 499 43	1,941 499 24	1,959 703 98
300	2,121 126 03	2,121 142 04	2,121 141 82	2,142 840 29
350	2,297 947 13	2,297 943 10	2,297 942 95	2,323 086 11
400	2,471 932 34	2,471 902 58	2,471 902 63	2,500 441 10
-51,275	0,797 736 60	0,797 707 38	0,797 707 09	0,793 819 11
-25,714	0,898 952 86	0,898 939 27	0,898 939 15	0,896 995 75
0,010	1,000 000 00	1,000 000 00	1,000 000 00	1,000 000 00
80,008	1,309 213 15	1,309 242 26	1,309 242 36	1,315 202 07
200,000	1,758 963 50	1,759 001 37	1,759 001 27	1,773 663 31
303,988	2,135 333 25	2,135 347 87	2,135 347 66	2,157 322 68
417,765	2,533 063 87	2,533 023 67	2,533 023 82	2,562 756 65

Tabelle 6.13: Tabellenwerte für die ITS-Abweichungsfunktion (ungewichtet)

Um Widerstandswerte zu erhalten sind die entsprechenden  $W$ -Werte mit dem letzten (aktuel-  
 len) Widerstandswert am Wassertripelpunkt zu multiplizieren. Für diesen Fall:

$$R(T_{90}) = W(T_{90}) \cdot 100,0045 \Omega.$$

In der folgenden Tabelle wurden aus gegebenen Temperaturen die  $W$ -Werte mit Hilfe der Gleichungen 6.1.1-5 bis 6.1.1-7 und den Koeffizienten aus Tabelle 6.10 (gewichtete Approximation) ermittelt. Zum Vergleich sind auch die Werte  $W_r(T_{90})$  der ITS-90-Referenzfunktion aufgelistet.

Temperatur in °C	ITS + 1. Ord	ITS + 2. Ord	ITS + 3. Ord	$W_r(T_{90})$
	$W$ -Wert	$W$ -Wert	$W$ -Wert	
-50	0,802 803 10	0,802 782 72	0,802 779 75	0,798 986 16
0	0,999 960 87	0,999 960 86	0,999 960 86	0,999 960 11
50	1,194 113 29	1,194 127 19	1,194 128 04	1,197 870 54
100	1,385 314 67	1,385 336 28	1,385 336 61	1,392 772 81
150	1,573 592 64	1,573 616 06	1,573 615 13	1,584 695 09
200	1,758 972 65	1,758 992 22	1,758 989 94	1,773 663 31
250	1,941 480 70	1,941 491 05	1,941 487 86	1,959 703 98
300	2,121 139 54	2,121 135 53	2,121 132 38	2,142 840 29
350	2,297 962 77	2,297 939 53	2,297 937 83	2,323 086 11
400	2,471 950 07	2,471 902 95	2,471 904 52	2,500 441 10
-51,275	0,797 734 16	0,797 713 18	0,797 710 10	0,793 819 11
-25,714	0,898 951 64	0,898 941 99	0,898 940 77	0,896 995 75
0,010	1,000 000 00	1,000 000 00	1,000 000 00	1,000 000 00
80,008	1,309 216 88	1,309 236 13	1,309 236 79	1,315 202 07
200,000	1,758 972 65	1,758 992 22	1,758 989 94	1,773 663 31
303,988	2,135 346 93	2,135 341 56	2,135 338 47	2,157 322 68
417,765	2,533 082 34	2,533 025 67	2,533 028 91	2,562 756 65

Tabelle 6.14: Tabellenwerte für die ITS-Abweichungsfunktion (gewichtet)

Um Widerstandswerte zu erhalten sind die entsprechenden  $W$ -Werte mit dem letzten (aktuel-  
 len) Widerstandswert am Wassertripelpunkt zu multiplizieren. Für diesen Fall:

$$R(T_{90}) = W(T_{90}) \cdot 100,0045 \Omega.$$

### 6.2.2 Testdatensatz für Thermoelemente

Um die Software oder das Approximationsverfahren zu überprüfen, ist in der folgenden Tabelle 6.15 ein Testdatensatz (Kalibrierung eines Thermoelements Typ S im Vergleichsverfahren) angegeben. Eine Approximation auf Grundlage dieser Daten sollte zu einem vergleichbaren Funktionsverlauf der Kennlinie auf Basis der in Tabelle 6.16 aufgeführten Koeffizienten und der ermittelten Restabweichungen der Messwerte von der jeweiligen Kennlinie in Tabelle 6.17 führen.

Temperatur $t / ^\circ\text{C}$	Thermospannung $U / \mu\text{V}$	Referenzspannung $U_R / \mu\text{V}$	Differenz $U - U_R / \mu\text{V}$
0	0,1	0	+0,1
200	1439,0	1440,8	-1,8
350	2783,5	2785,8	-2,3
500	4231,3	4233,3	-2,0
650	5752,0	5753,0	-1,0
800	7345,5	7345,0	+0,5
900	8451,0	8449,2	+1,8
1000	9589,7	9587,1	+2,6
1100	10759,5	10756,5	+3,0

Tabelle 6.15: Testdatensatz für Thermoelemente

Für ein Abweichungspolynom 3. Ordnung sowie zwei Standard-Polynome 5. und 6. Ordnung ergeben sich die in Tabelle 6.16 aufgeführten Koeffizienten.

Koeffizienten	Abweichungspolynom 3. Ordnung	Standard-Polynom 5. Ordnung	Standard-Polynom 6. Ordnung
$a_0 / \mu\text{V}$	0,1979	0,0059	0,1006
$a_1 / \mu\text{V}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$	-0,01697	5,57712	5,44478
$a_2 / \mu\text{V}\cdot^\circ\text{C}^{-2}$	3,21919E-5	0,01049	0,01181
$a_3 / \mu\text{V}\cdot^\circ\text{C}^{-3}$	-1,29895E-8	-1,38628E-5	-1,86144E-5
$a_4 / \mu\text{V}\cdot^\circ\text{C}^{-4}$		1,03401E-8	1,81586E-8
$a_5 / \mu\text{V}\cdot^\circ\text{C}^{-5}$		-2,95240E-12	-8,96427E-12
$a_6 / \mu\text{V}\cdot^\circ\text{C}^{-6}$			1,75112E-15

Tabelle 6.16: Koeffizienten der Polynome aus dem Testdatensatz für Thermoelemente

Die Restabweichungen der berechneten Kennlinien von den gegebenen Messwerten sind in Tabelle 6.17 angegeben.

Temperatur $t / ^\circ\text{C}$	Abweichungspolynom 3. Ordnung	Standard-Polynom 5. Ordnung	Standard-Polynom 6. Ordnung
0	-0,10	0,09	-0,00
200	0,21	-0,68	0,01
350	0,05	1,32	-0,01
500	-0,14	-0,63	0,00
650	-0,20	-0,83	0,04
800	-0,07	0,79	-0,11
900	0,27	0,78	0,12
1000	0,17	-1,24	-0,06
1100	-0,19	0,39	0,01

Tabelle 6.17: Restabweichungen der gemessenen Thermospannungen von der jeweiligen berechneten Kennlinie ( $U_{\text{Messwert}} - U_{\text{Kennlinie}}$ ) in  $\mu\text{V}$

### 6.2.3 Testdatensatz für Thermistoren

Um die Software oder das Approximationsverfahren zu überprüfen, ist in der folgenden Tabelle 6.18 ein Testdatensatz (fiktive Kalibrierung eines Thermistors) angegeben. Eine Approximation auf Grundlage dieser Daten mit den Gleichungen 6.2.3-1 bis 6.2.3-4 sollte zu einem vergleichbaren Funktionsverlauf der Kennlinie auf Basis der in Tabelle 6.19 angegebenen Koeffizienten führen.

Falls bereits die groß gedruckten Ziffern der Koeffizienten aus den folgenden Tabellen dieses Kapitels mit den Berechnungen der zu testenden Software identisch sind, so stimmen beide Ergebnisse auf wenige 0,1 mK oder besser überein und es kann in den meisten Fällen auf den Vergleich der Kurvenverläufe verzichtet werden.

Temperatur $t$ in $^\circ\text{C}$	Thermistorwiderstand $R_T$ in $\Omega$
-40	336 500
-20	97 080
0	32 650
25	10 000 ( $R_{T0}$ )
50	3 603,0
80	1 255,0

Tabelle 6.18: Testdatensatz für Thermistoren

Die obigen Daten werden in

$$\frac{1}{T} = a_0 + a_1[\ln R_T] + a_3[\ln R_T]^3 \quad (6.2.3-1)$$

bzw.

$$\frac{1}{T} = a_0 + a_1[\ln R_T] + a_2[\ln R_T]^2 + a_3[\ln R_T]^3 \quad (6.2.3-2)$$

eingesetzt mit  $T = t + 273,15$  K.

Ebenso wird teilweise die Form

$$\frac{1}{T} = a_0 + a_1[\ln(R_T / R_{T0})] + a_3[\ln(R_T / R_{T0})]^3 \quad (6.2.3-3)$$

bzw.

$$\frac{1}{T} = a_0 + a_1[\ln(R_T / R_{T0})] + a_2[\ln(R_T / R_{T0})]^2 + a_3[\ln(R_T / R_{T0})]^3 \quad (6.2.3-4)$$

angewendet.

### 1) Approximation mit Hilfe einer Transformation

Üblicherweise erfolgt die Approximation mit Hilfe von Standard-Polynomen, wobei die Daten vorher mit  $x = \ln(R_T)$  bzw.  $x = \ln(R_T / R_{T0})$  und  $y = 1/T$  transformiert werden.

Eine Approximation ergibt dann die in Tabelle 6.19 und Tabelle 6.20 angegebenen Koeffizienten bzw. einen äquivalenten Funktionsverlauf.


	Gleichung 6.2.3-1	Gleichung 6.2.3-2	Einheit
$a_0$	1,1295343566E-03	1,1418856078E-03	K <sup>-1</sup>
$a_1$	2,3409324908E-04	2,3020424818E-04	(ln Ω) <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$a_2$	—	3,9895899090E-07	(ln Ω) <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup>
$a_3$	8,7532010810E-08	7,4178797508E-08	(ln Ω) <sup>-3</sup> K <sup>-1</sup>

Tabelle 6.19: Koeffizienten für Thermistoren aus den Testdaten mit  $x = \ln(R_T)$

	Gleichung 6.2.3-3	Gleichung 6.2.3-4	Einheit
$a_0$	3,359490268E-03	3,3539460517E-03	K <sup>-1</sup>
$a_1$	2,53930869E-04	2,5643118888E-04	K <sup>-1</sup>
$a_2$	—	2,4485949237E-06	K <sup>-1</sup>
$a_3$	8,396964E-07	7,4178791523E-08	K <sup>-1</sup>

Tabelle 6.20: Koeffizienten für Thermistoren aus den Testdaten mit  $x = \ln(R_T / R_{T0})$

Die Gleichungen 6.2.3-2 und 6.2.3-4 sind gleich gut geeignet und führen mit den jeweils angegebenen Koeffizienten zu einem identischen Funktionsverlauf.

	Bestimmung von Thermometerkennlinien <a href="https://doi.org/10.7795/550.20180828AG">https://doi.org/10.7795/550.20180828AG</a>	DKD-R 5-6	
		Ausgabe:	09/2018
		Revision:	0
		Seite:	48/53

Gleichung 6.2.3-1 und 6.2.3-3 hingegen haben ein unterschiedliches Verhalten.

**Bei Verwendung dieser Testdaten ist Gleichung 6.2.3-3 viel schlechter geeignet!**

Andere Testdaten zeigten ein ähnliches Verhalten. Je größer der Temperaturbereich der Messwerte ist, um so schlechter scheint die Gleichung 6.2.3-3 im Verhältnis zu Gleichung 6.2.3-1 geeignet zu sein.

Soll diese Gleichung dennoch verwendet werden, so muss die Eignung - wie bereits allgemein im Abschnitt „Grundlagen“ im Kapitel 2.2.2 erläutert - für den konkreten Fall überprüft werden.

## 2) Approximation der Originalfunktion

Erfolgt (ohne vorherige Transformation der Messdaten) direkt die Approximation der Originalfunktion - z.B. durch Näherungsverfahren -, so ergeben sich andere Koeffizienten mit leicht verändertem Funktionsverlauf. Dieses Verfahren führt zu etwas besseren Ergebnissen (siehe Gleichung (2-1)), ist jedoch mathematisch schwieriger lösbar.

Eine Approximation ergibt dann die in den folgenden Tabellen angegebenen Koeffizienten bzw. einen äquivalenten Funktionsverlauf.

	Gleichung 6.2.3-1	Gleichung 6.2.3-2	Einheit
$a_0$	1,1302024127E-03	1,1470200810E-03	$K^{-1}$
$a_1$	2,3398622636E-04	2,2856809546E-04	$(\ln \Omega)^{-1} K^{-1}$
$a_2$	—	5,6885010109E-07	$(\ln \Omega)^{-2} K^{-1}$
$a_3$	8,7895497057E-08	6,8425603427E-08	$(\ln \Omega)^{-3} K^{-1}$

Tabelle 6.21: Koeffizienten für Thermistoren aus den untransformierten Testdaten (1 und 2)

	Gleichung 6.2.3-3	Gleichung 6.2.3-4	Einheit
$a_0$	3,359512929E-03	3,3539278611E-03	$K^{-1}$
$a_1$	2,52740115E-04	2,5646040935E-04	$K^{-1}$
$a_2$	—	2,4595194192E-06	$K^{-1}$
$a_3$	8,897925E-07	6,8425589256E-08	$K^{-1}$

Tabelle 6.22: Koeffizienten für Thermistoren aus den untransformierten Testdaten (3 und 4)

Zu Gleichung 6.2.3-3 gelten hier ebenso die oben genannten Warnhinweise!

Die klein gedruckten Ziffern haben bei der Berechnung der Temperatur einen Einfluss von weniger als 0,1 mK. Sie brauchen normalerweise nicht angegeben werden, sind hier aber wegen der besseren Vergleichbarkeit aufgeführt. Die erforderliche Stellenzahl hängt auch vom Temperaturbereich des Thermometers und dem Exponenten des Koeffizienten ab, ist also bei verschiedenen Thermometern nicht unbedingt identisch. Die Angaben hier beziehen sich auf den Temperaturbereich des Testdatensatzes.

Exemplarisch sind anhand der Koeffizienten aus Tabelle 6.19 und den daraus resultierenden Funktionen für die Messwerte (Stützstellen) folgende Abweichungen von den berechneten Kennlinien ermittelt worden:



Temperatur in °C	Abweichung Gleichung 6.2.3-1		Abweichung Gleichung 6.2.3-2	
	in Ω	in °C	in Ω	in °C
-40	25,6	0,001	-34,3	-0,002
-20	5,0	0,001	34,5	0,006
0	-13,2	-0,008	-8,7	-0,005
25	-0,5	-0,001	-2,7	-0,006
50	2,7	0,019	1,6	0,012
80	-0,5	-0,013	-0,2	-0,005

Tabelle 6.23: Abweichungen der gemessenen Thermistor-Widerstandswerte von der jeweils berechneten Kennlinie ( $R_{\text{Messwert}} - R_{\text{Kennlinie}}$ )

### 6.3 Mathematische Hilfsmittel

#### 6.3.1 Algorithmus für eine Polynom-Approximation

Um beispielsweise die Koeffizienten für ein Polynom 2. Ordnung mit der Gleichung

$$R_i = R_0 \cdot (1 + at_i + bt_i^2) \quad (\text{entspr. Gleichung (6.1.1-2), Anhang 6.1.1})$$

mit  $n$  Messwerten  $R_i$  ( $t_i$ ) zu ermitteln ist folgende Matrixgleichung zu lösen:

$$\begin{pmatrix} n & \sum t_i & \sum t_i^2 \\ \sum t_i & \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^2 & \sum t_i^3 & \sum t_i^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_0 \\ R_0 \cdot a \\ R_0 \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum R_i \\ \sum R_i \cdot t_i \\ \sum R_i \cdot t_i^2 \end{pmatrix} \quad (6.3.1-1)$$

#### 6.3.2 Algorithmus für die Callendar-van-Dusen-Approximation

Zur Ermittlung der Koeffizienten der weit verbreiteten Callendar-van-Dusen-Gleichung

$$R_i = R_0 (1 + At_i + Bt_i^2 + C(t_i - 100^\circ\text{C})t_i^3) \quad \text{mit } C = 0 \text{ für } t_i > 0^\circ\text{C} \quad (\text{entspr. Gleichung (6.1.1-1)})$$

erweitert sich das Matrixsystem wie folgt:

$$\begin{pmatrix} n & \sum t_i & \sum t_i^2 & \sum t_{\text{neg},j}^3 (t_{\text{neg},j} - 100^\circ\text{C}) \\ \sum t_i & \sum t_i^2 & \sum t_i^3 & \sum t_{\text{neg},j}^4 (t_{\text{neg},j} - 100^\circ\text{C}) \\ \sum t_i^2 & \sum t_i^3 & \sum t_i^4 & \sum t_{\text{neg},j}^5 (t_{\text{neg},j} - 100^\circ\text{C}) \\ \sum t_{\text{neg},j}^3 (t_{\text{neg},j} - 100^\circ\text{C}) & \sum t_{\text{neg},j}^4 (t_{\text{neg},j} - 100^\circ\text{C}) & \sum t_{\text{neg},j}^5 (t_{\text{neg},j} - 100^\circ\text{C}) & \sum t_{\text{neg},j}^6 (t_{\text{neg},j} - 100^\circ\text{C})^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_0 \\ R_0 \cdot A \\ R_0 \cdot B \\ R_0 \cdot C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum R_i \\ \sum R_i \cdot t_i \\ \sum R_i \cdot t_i^2 \\ \sum R_{\text{neg},j} \cdot t_{\text{neg},j}^3 (t_{\text{neg},j} - 100^\circ\text{C}) \end{pmatrix} \quad (6.3.2-1)$$

wobei  $t_{\text{neg},j}$  nur die Untermenge aller gemessenen negativen Temperaturen ( $t_i < 0^\circ\text{C}$ ) darstellt und entsprechend  $R_{\text{neg},j}(t_{\text{neg},j})$  nur die Widerstandsmesswerte bei negativen Temperaturen darstellt.

Dieses geschlossene Verfahren hat den Vorteil, dass die Approximation in einem Schritt durchgeführt wird und positive wie negative Werte gleichberechtigt auf alle Koeffizienten Einfluss ausüben. Es wird also nicht der  $C$ -Koeffizient nur durch die negativen und die übrigen Koeffizienten nur durch die positiven Messwerte bestimmt.

#### 6.4 Musterkalibrierschein

Die Abschnitte „Messergebnisse“ und „Messunsicherheit“ in einem Kalibrierschein könnten z.B. folgendermaßen aussehen:

DEUTSCHE AKKREDITIERUNGSSTELLE **DAkks**

#### Messergebnisse

In Tabelle 1 sind die Messergebnisse in der Reihenfolge der Kalibrierung angegeben:

**Tabelle 1: Messwerte**

Temperatur $t_{90}$ in °C	Thermospannung in $\mu\text{V}$	Messunsicherheit in $\mu\text{V}$ *)
Cu-Fixpunkt 1084,62	13158,1	4,5
Ag-Fixpunkt 961,78	10708,0	3,7
Al-Fixpunkt 660,32	5710,4	2,1
Zn-Fixpunkt 419,53	2918,7	1,5
Sn-Fixpunkt 231,93	_____	_____
Eispunkt 0,00	_____	_____

\*) Die angegebene Messunsicherheit schließt die Unsicherheitsanteile der Temperaturmessung und -darstellung mit ein.

Die Kennlinienfunktion des kalibrierten Thermoelementes errechnet sich aus diesen Messwerten und der im Labor verwendeten Referenzfunktion für Thermoelemente als nachfolgendes Polynom mit den in Tabelle 2 gegebenen Koeffizienten:

$$E / \mu\text{V} = \sum_{i=0}^8 a_i \cdot (t_{90} / ^\circ\text{C})^i \quad \text{für den Temperaturbereich: } 0 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ bis } 660,323 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$E / \mu\text{V} = \sum_{i=0}^6 b_i \cdot (t_{90} / ^\circ\text{C})^i \quad \text{für den Temperaturbereich: } > 660,323 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ bis } 1100 \text{ } ^\circ\text{C}$$

mit  $E$ : Thermospannung in  $\mu\text{V}$

und  $t_{90}$ : Temperatur in  $^\circ\text{C}$  (ITS-90).

**Tabelle 2: Koeffizienten**

$a_0$	$-5,40580438 \cdot 10^{-02}$	$b_0$	$-4,97767758 \cdot 10^{+02}$
$a_1$	$5,18978480 \cdot 10^{+00}$	$b_1$	$1,00753718 \cdot 10^{+01}$
$a_2$	$4,60796668 \cdot 10^{-03}$	$b_2$	$-1,57960423 \cdot 10^{-02}$
$a_3$	$-9,60227100 \cdot 10^{-06}$	$b_3$	$3,63617000 \cdot 10^{-05}$
$a_4$	$2,99224300 \cdot 10^{-08}$	$b_4$	$-2,69015090 \cdot 10^{-08}$
$a_5$	$-2,01252300 \cdot 10^{-11}$	$b_5$	$9,56273660 \cdot 10^{-12}$
$a_6$	$-1,26851400 \cdot 10^{-14}$	$b_6$	$-1,35707370 \cdot 10^{-15}$
$a_7$	$2,25782300 \cdot 10^{-17}$		
$a_8$	$-8,51006800 \cdot 10^{-21}$		

Die Koeffizienten gelten nur für den Temperaturbereich 0 °C bis 1100 °C. Eine Extrapolation führt zu schnell wachsenden Abweichungen vom tatsächlichen Thermometerverhalten.

### **Messunsicherheit**

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$  ergibt. Sie wurde gemäß DAkKS-DKD-3 ermittelt. Der Wert der Messgröße liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % im zugeordneten Werteintervall.

Temperaturbereich		Messunsicherheit
0 °C	bis 960 °C	0,4 K
> 960 °C	bis 1100 °C	0,5 K

Diese Messunsicherheiten setzen sich zusammen aus den Unsicherheiten der Normale (Fixpunkte), des Kalibrierverfahrens, der mathematischen Kennlinienapproximation und den Eigenschaften des kalibrierten Thermoelements, insbesondere in Bezug auf seine Kurzzeitstabilität und seine thermoelektrische Inhomogenität. Ein Anteil für die Langzeitstabilität ist dabei nicht enthalten.

## 7 Literatur

- [1] „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“, DIN ENV 13005
- [2] „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“, first edition, 1993, corrected and reprinted 1995, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland
- [3] DAkkS-DKD-3, „Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen“, deutsche Fassung der Publikation EA-4/02 (1998), Deutsche Akkreditierungsstelle (DAkkS), Braunschweig
- [4] DAkkS-DKD-3-E1, „Ergänzung 1 zu DAkkS-DKD-3 (Beispiele)“, deutsche Fassung der Publikation EA-4/02-S1 (1998), Deutsche Akkreditierungsstelle (DAkkS), Braunschweig
- [5] DAkkS-DKD-3-E2, „Ergänzung 2 zu DAkkS-DKD-3 (Zusätzliche Beispiele)“, deutsche Fassung der Publikation EA-4/02-S2 (2002), Deutsche Akkreditierungsstelle (DAkkS), Braunschweig
- [6] S. Friederici, DKD Tem 98, „DKD Sternvergleich Meßdatenauswertung 1998, Kennlinienapproximation von Pt-100 Fühlern, Abschlußbericht“, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig und Berlin
- [7] „Industrielle Platin-Widerstandsthermometer und Platin-Meßwiderstände“, EN 60751:1995 + A2:1995 bzw. IEC 60751:1983 + AMD 1:1986 + AMD 2:1995
- [8] „Thermopaare, Teil 1: Grundwerte der Thermospannungen“, EN 60584-1:1995 bzw. IEC 60584-1:1995
- [9] „Thermopaare, Teil 2: Grenzabweichungen der Thermospannungen“, EN 60584-2:1993 bzw. IEC 60584-2:1982 + A1:1989
- [10] „Technische Temperaturmessungen - Grundlagen und Übersicht über besondere Temperaturmeßverfahren“, VDI/VDE 3511, Blatt 1
- [11] „Technische Temperaturmessungen - Berührungsthermometer“, VDI/VDE 3511, Blatt 2
- [12] „Technische Temperaturmessungen - Meßverfahren und Meßwertverarbeitung für elektrische Berührungsthermometer“, VDI/VDE 3511, Blatt 3
- [13] PTB-Prüfregel, Band 2: „Flüssigkeits-Glasthermometer“, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig und Berlin, ISSN 0341-7964
- [14] „Unsichere Messungen und ihre Wirkung auf das Meßergebnis“, VDI/VDE 2620
- [15] K. Weise, W. Wöger, „Meßunsicherheit und Meßdatenauswertung“ (1999), ISBN 3-527-29610-7
- [16] H. Schaumburg, „Sensoren (Werkstoffe und Bauelemente der Elektrotechnik; 3)“ (1992), ISBN 3-519-06125-2
- [17] „International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology“, second edition, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland (1993); Deutsche Übersetzung: „Internationales Wörterbuch der Metrologie“ (1994), 2. Auflage, DIN e.V., ISBN 3-410-13086-1
- [18] H. Preston-Thomas, „The International Temperature Scale of 1990 (ITS-90)“, Metrologia 27, 3-10 (1990)
- [19] „Supplementary Information for the International Temperature Scale of 1990“, Sèvres, Bureau International des Poids et Mesures (1990), ISBN 92-822-2111-3
- [20] „Techniques for Approximating the International Temperature Scale of 1990“, Sèvres, Bureau International des Poids et Mesures (1990), ISBN 92-822-2110-5

- [21] J.V. Nicholas, D.R. White, „Traceble Temperatures“, second edition, ISBN 0-471-49291-4 (2001)
- [22] F. Bernhard, „Technische Temperaturmessung“, ISBN 3-540-62672-7 (2004)
- [23] L. Crovini, H.J. Jung, R.C. Kemp, S.K. Ling, B.W. Mangum, H. Sakurai, „The Platinum Resistance Thermometer Range of the International Temperature Scale of 1990“, Metrologia 28, 317-325 (1991)
- [24] J.F. Dubbeldam, M.J. de Groot, „Interpolating Equations and Uncertainties of Industrial PRT's“ in Proceedings of the EUROMET workshop, Uncertainties in Temperature Measurements, Paris, 23–24 March 1998
- [25] D.R. White, „The contribution of uncertainties in resistance measurements to uncertainties in the realisation of ITS-90“ in Proceedings of the EUROMET workshop, Uncertainties in Temperature Measurements, Paris, 23–24 March 1998
- [26] T. Weckström, „Pt-100 thermometers and the ITS-90“ in Proceedings of Tempmeko 2004, pp. 813, Dubrovnik, 22–25 June 2004
- [27] „Resistance-thermometer sensors made of platinum, copper or nickel (for industrial and commercial use)“, OIML R 84
- [28] G.W. Burns, M.G. Scroger, G.F. Strouse, M.C. Croarkin, W.F. Guthrie, „Temperature-Electromotive Force Reference Functions and Tables for the Letter-Designated Thermocouple Types Based on the ITS-90“, NIST Monograph 175, Washington, D.C., U.S. Government Printing Office (1993)
- [29] W.F. Guthrie et al., „Statistical analysis of type S thermocouple measurements on the International Temperature Scale of 1990“ aus TEMPERATURE, Its Measurement and Control in Science and Industry, Vol. 6, part 1 (1992), ISBN 1-56396-091-5
- [30] R.E. Bentley, „Variability of deviation functions and ease of interpolation for Pt-based thermocouples“, Metrologia 35, 41-47 (1998)
- [31] G.W. Burns et al., „New reference function for platinum-10% rhodium vs. platinum (type S) thermocouples based on the ITS-90“, part I and II aus TEMPERATURE, Its Measurement and Control in Science and Industry, Vol. 6, part 1 (1992), ISBN 1-56396-091-5
- [32] G.W. Burns, G.F. Strouse, B.M. Liu, B.W. Mangum, „Gold vs. platinum thermocouples: performance data and an ITS-90 based reference function“ aus TEMPERATURE, Its Measurement and Control in Science and Industry, Vol. 6, part 1 (1992), ISBN 1-56396-091-5
- [33] „Manual on the use of Thermocouples in Temperature Measurement“, ASTM 28-012 093-40
- [34] W.R. Siwek et al., „A precision temperature standard based on the exactness of fit of thermistor resistance-temperature data using third degree polynomials“ aus TEMPERATURE, Its Measurement and Control in Science and Industry, Vol. 6, AIP, 1992
- [35] M. Sapoff et al., „The Exactness of Fit of Resistance-Temperature Data of Thermistors with Third-Degree Polynomials“ aus TEMPERATURE, Its Measurement and Control in Science and Industry, Vol 5, AIP, 1982
- [36] M. Sapoff, W.R. Siwek, „The Exactness of Fit of R-T Data Using a Three-Constant Third Degree Polynomial“, Unpublished Report, Thermometrics, Inc, 9/1983
- [37] H. Bandemer, „Ratschläg zum mathematischen Umgang mit Ungewißheit“, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
- [38] P.R. Bevington, „Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences“, McGraw-Hill Book Co., New York (1969)