

Quantenvielteilchenphysik und Quantencomputer

Tanja Mehlstäubler¹, Henning A. Fürst², Christian Ospelkaus³

Die genaue Beschreibung von Vielteilchensystemen und die Vorhersage ihres Verhaltens ist eine extrem anspruchsvolle Aufgabe, von der Entwicklung neuer Wirkstoffe und Materialien bis hin zur Beschreibung kollektiver Phänomene wie Magnetismus in Festkörpern. Insbesondere die Quantenmechanik zeigt hier sehr grundlegende Herausforderungen auf. Gleichzeitig sind viele Fragen von enormer praktischer Bedeutung, beispielsweise nach dem Ursprung der Hochtemperatur-Supraleitung, nur teilweise verstanden. In einem berühmten Artikel beschäftigte sich Richard Feynman mit der Frage, inwiefern man Systeme, die der Quantenmechanik unterliegen, effizient auf Supercomputern beschreiben und Vorhersagen über sie machen kann [1]. Er stellte dabei fest, dass ein hinreichend komplexes System sich aufgrund des exponentiellen Wachstums des Zustandsraumes mit der Anzahl der Konstituenten in voller Allgemeinheit auf keinem Supercomputer beschreiben lassen wird, der auf den grundlegenden Prinzipien aktueller Rechnerarchitekturen beruht. Allein um das Verhalten von nur 128 wechselwirkenden Spins auf einem Gitter zu beschreiben (ein elementares Modell von Quantenmagnetismus) bräuchte man mehr klassische Bits als es Protonen im gesamten Universum gibt. Feynman zeigte in seinem Beitrag auf, dass eine neue Art von Rechnerarchitektur, welche nach den Prinzipien der Quantenmechanik funktioniert, in der Lage wäre, ein solches Problem in endlicher Zeit und mit endlichen Ressourcen zu bearbeiten. Im genannten Beispiel käme man mit einer Anzahl von Quanten-Bits oder Qubits von derselben Größenordnung wie die Anzahl der zu simulierenden wechselwirkenden Spins aus. Ein solches Qubit ist im Wesentlichen ein quantenmechanisches Zwei-Niveau-System, wie es uns in der Magnetresonanz begegnet. In der Praxis kann es die unterschiedlichsten Realisierungen geben. Die Idee des Quantencomputers nahm Form an. Einen wesent-

lichen Schub bekam seine experimentelle Entwicklung in der Mitte der 90er Jahre, als verschiedene Algorithmen von praktischem Interesse entdeckt wurden, unter anderem solche, welche die Sicherheit existierender und weit verbreiteter Verschlüsselungsverfahren in Frage stellten. Parallel dazu entwickelten Cirac und Zoller [2] ein Konzept, wie sich die notwendigen Operationen in einem Quantencomputer auf Basis einzelner Ionen realisieren lassen könnten. Mittlerweile sind alle elementaren Bausteine eines solchen Quantencomputers mit Ionen demonstriert worden; die Skalierung dieser Systeme hin zu großen Zahlen von Qubits stellt eine große Herausforderung und ein großes Versprechen dar. Die erwarteten Anwendungen liegen dabei zunächst im Bereich der Quantenchemie, der Materialentwicklung und der Lösung von Optimierungsproblemen. Die Realisierung einer universellen Maschine würde den Weg hin zu einem völlig neuen Verständnis von Quantenvielteilchenphysik und zu einem konstruktiven Umgang mit der Dynamik quantenphysikalischer Systeme eröffnen.

Parallel dazu haben sich nicht nur gespeicherte Ionen, sondern atomare und molekulare Quantensysteme im Allgemeinen dadurch ausgezeichnet, dass spezifische Probleme der Quantenvielteilchenphysik sich häufig auch (in einer weniger universellen, dafür aber unmittelbarer Weise) direkt auf ein Modellsystem abbilden lassen. Oft können aufgrund der exzellenten Kontrolle über diese Modellsysteme wichtige Erkenntnisse über das Verhalten der Natur abgeleitet werden.

Nichtgleichgewichtsdynamik und Phasenübergänge

In der Natur stellt Reibung ein omnipräsentes, rein klassisches Phänomen dar, was auf Rauigkeit von ineinandergreifenden Oberflächen beruht. Dabei ist die physikalische Beschreibung auf unterschied-

¹ Prof. Dr. Tanja E. Mehlstäubler, QUEST | Institut an der PTB, Institut für Quantenoptik, Leibniz Universität Hannover, E-Mail: tanja.mehlstaebler@ptb.de

² Dr. Henning A. Fürst, QUEST | Institut an der PTB, E-Mail: henning.fuerst.ext@ptb.de

³ Prof. Dr. Christian Ospelkaus, Institut für Quantenoptik, Leibniz Universität Hannover, QUEST | Institut an der PTB, E-Mail: christian.ospelkaus@iqo.uni-hannover.de

lichsten Größenskalen, vom Wanderschuh an der Felswand über die Abnutzung von Bremsbelägen bis hin zum Erdbeben durch Plattentektonik, sehr ähnlich. Große Unterschiede zeigen sich erst beim Betrachten atomarer, wohlgeordneter Systeme, wie sie durch die Entwicklung von Nanotechnologie erstmals zugänglich geworden sind. Durch den fortschreitenden Trend zur Miniaturisierung spielt die Untersuchung von Nanoreibung eine zunehmende Rolle bei Nanomaschinen und Metamaterialien [3], [4] aber auch zum Verständnis des Verhaltens von Biomolekülen [5]. Die genauere Untersuchung dieser Systeme ist allerdings oft nur sehr schwer experimentell zugänglich.

Einen Ausweg bietet wie oben dargelegt die Verwendung von analogen Modellsystemen, die sich in ihrer mikroskopischen Physik durchaus vom ursprünglichen System unterscheiden können. Häufig lassen sich aber die makroskopischen Eigenschaften beider Systeme durch einen universellen, mathematischen Formalismus beschreiben. Mithilfe eines gut zu kontrollierenden Modellsystems können also durchaus Vorhersagen über weitere Systeme getroffen werden. Ein konkreter Fall in der Thermodynamik sind Phasenübergänge. Sie beschreiben beispielsweise das Ändern des Aggregatzustandes eines Stoffes, den Übergang eines Materials zur Supraleitung und den Übergang von Ferro- zu Paramagnetismus. Man unterscheidet zwischen Phasenübergängen erster und zweiter Ordnung. Bei Übergängen erster Ordnung kommt es zum Auftreten von latenter Wärme (benötigt zum Beispiel zum Schmelzen von Eis zu Wasser). Charakteristisch für Phasenübergänge zweiter Ordnung hingegen ist das Ausbleiben dieser Wärme. Meistens kommt es beim Übergang zweiter Ordnung aber zusätzlich zur spontanen Symmetriebrechung, das heißt, das System sucht sich am Übergang spontan einen von nunmehr mehreren möglichen Grundzuständen aus. Allgemein wird das durch den sogenannten Ordnungsparameter beschrieben, der am Phasenübergang von Null kontinuierlich auf einen endlichen (reellen, vektoriellen oder komplexen) Wert ansteigt, wie es vom Physiker Lev Landau bereits im Jahr 1937 formuliert wurde [6] und schematisch

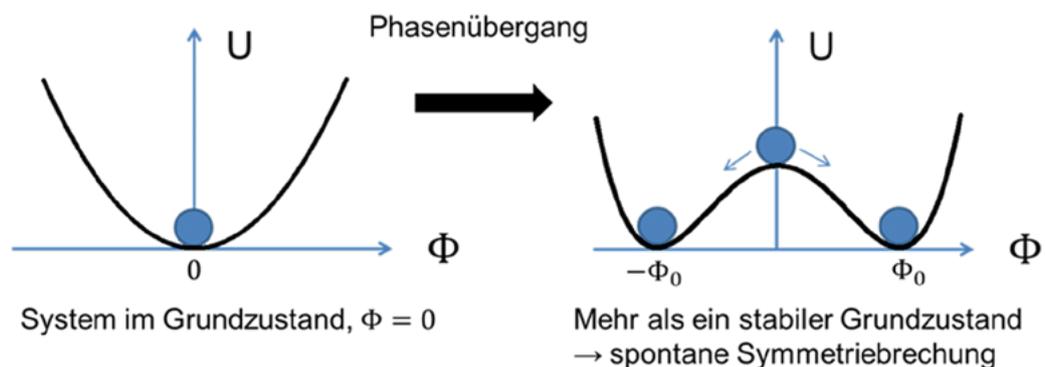
in **Abbildung 3.1** dargestellt ist.

Im Beispiel des Ferromagnetismus ist der Ordnungsparameter Φ , die sich spontan ausbildende Magnetisierung und ihre Richtung, in diesem Fall also sogar eine komplexe Größe mit zwei Freiheitsgraden. Durchläuft das System den Phasenübergang zu schnell, kann es den äußeren Änderungen nicht mehr folgen d. h. die sich neu einstellende Symmetrie kann nicht gleichzeitig kommuniziert werden. Dadurch können sich Domänen unterschiedlicher Symmetrie bilden. Die Grenzflächen dieser Domänen werden topologische Defekte genannt. Vereinfacht gesprochen sind dies stabile Strukturen, die Bereiche unterschiedlicher Symmetrie trennen. Im konkreten Fall des Ferromagnetismus sind dies die Domänenwände zwischen verschiedenen magnetisierten Bereichen des Festkörpers.

Zum Untersuchen dieser Vielteilchenphänomene werden am QUEST-Institut der PTB lasergekühlte Ionenkristalle verwendet. Als hervorragend isoliertes, kontrollierbares Quantensystem werden sie zur Untersuchung von Nichtgleichgewichtsdynamik und Phasenübergängen eingesetzt und haben zuletzt die Emulation von Nanoreibung ermöglicht [7]. Die gefangenen Ionen bilden hierbei ein Festkörper-Modellsystem, was durch Laserlicht und elektrische Felder präpariert und ausgelesen werden kann, und starke strukturelle Ähnlichkeit zu anderen selbstorganisierten Systemen wie DNS-Ketten [8], [9], [10] und Polymeren [11] aufweist. Beispiele für strukturelle Phasenübergänge von eindimensionalen Coulomb Kristallen zu höheren Dimensionen durch Anpassen der Fallenspannung sind in **Abbildung 3.3** dargestellt.

Aufgrund des universellen, mathematischen Konzepts der Thermodynamik von Phasenübergängen können viele Fragestellungen allgemeiner Vielteilchensysteme direkt auf die Physik der Ionenkristalle übertragen und untersucht werden. Die Entstehung topologischer Defekte durch Phasenübergänge wird durch den Kibble-Zurek-Mechanismus beschrieben, benannt nach Tom W.B. Kibble und Wojciech H. Zurek [13], [24] und diente ursprünglich zur Erklärung potenzieller topologischer Defekte im frühen Universum.

Abbildung 3.1: Verhalten des Ordnungsparameters bei einem Phasenübergang 2. Ordnung mit spontaner Symmetriebrechung. Der Ordnungsparameter nimmt hier spontan eine der hier zwei möglichen Realisierungen an.



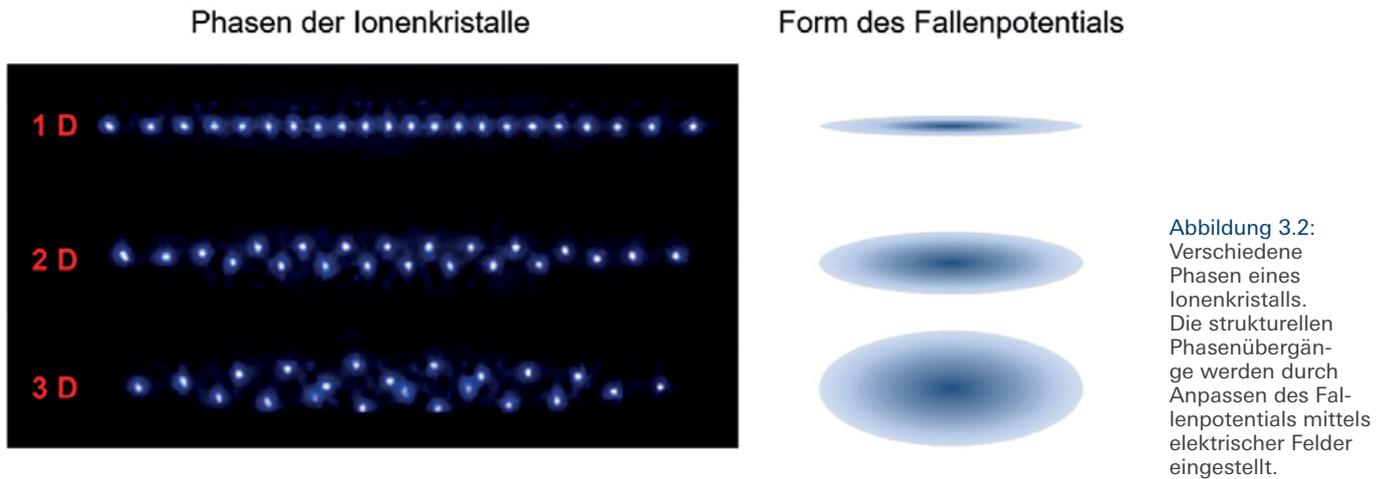


Abbildung 3.2: Verschiedene Phasen eines Ionenkristalls. Die strukturellen Phasenübergänge werden durch Anpassen des Fallenpotentials mittels elektrischer Felder eingestellt.

Gerade hier wird die hochgradige Universalität der Physik von Vielteilchensystemen deutlich: Das entwickelte Konzept zur Beschreibung von Prozessen im abstrakten, frühen Universum ist direkt anwendbar auf ein wesentlich überschaubareres Laborsystem, bestehend aus gefangenen, lasergekühlten Ionen. Im Speziellen beschreibt der Kibble-Zurek-Mechanismus die Dichte der auftretenden topologischen Defekte in Abhängigkeit der charakteristischen Zeit τ_Q , mit der der Phasenübergang durchlaufen wird:

$$\propto \left| \frac{1}{\tau_Q} \right|^{\frac{\nu}{1+\nu z}},$$

wobei die Parameter des Exponenten von aus der Theorie von Ginzburg und Landau zu $\nu = 1/2$ und $z = 1$ aus der Symmetrie des Systems vorgegeben sind. Mit dem Ziel diese Skalierung nachzuweisen, wurde erstmals die spontane Symmetriebrechung am Phasenübergang von linearen Ionenkristallen zu zweidimensionalen zick-zack Kristallen untersucht. Durch schnelle, nichtadiabatische Relaxation des radialen Fallenpotentials kommt es zum Phasenübergang beginnend in der Mitte des Kristalls. Breitet sich der Phasenübergang schneller aus, als die Schallgeschwindigkeit im Kristall, kann es zum Auftreten topologischer Defekte kommen, wie in *Abbildung 3.2* dargestellt.

Durch Variation der Relaxationsgeschwindigkeit $\propto 1/\tau_Q$ konnte an der PTB die durch Kibble und

Zurek vorhergesagte Skalierung der Defektdichte gemessen werden [14], [15]. Eine Studie der Universität Mainz kam durch Komprimieren der axialen Falleneinschlusses zu ähnlichen Ergebnissen [16], Damit ist es an der PTB weltweit erstmals gelungen, topologische Defekte in Ionenkristallen durch spontane Symmetriebrechung zu erzeugen und durch Laserkühlung zu speichern.

Die damit geschaffene Plattform hat es wenig später ermöglicht, einen weiteren Phasenübergang zweiter Ordnung zu studieren, den im Jahr 1983 postulierten Aubry-Übergang [17]. Er beschreibt das Verhalten von Reibung eines hochgeordneten Systems, bestehend aus zwei übereinander gleitenden, atomaren Oberflächen. Dabei kann das System von einem Zustand endlicher Reibung in ein komplett reibungsfreies Regime wechseln, wenn die beiden Gitterkonstanten der aufeinander gleitenden Atomlagen in einem irrationalen Verhältnis zueinanderstehen. Erst kürzlich wurde vorgeschlagen, dieses kollektive Phänomen mit gefangenen Ionen als Modellsystem zu untersuchen [18]. Eine Möglichkeit besteht darin, eine Ionenkette in die Stehwelle eines optischen Resonators zu setzen. Hierbei formt die stehende Welle des optischen Feldes mit Wellenlänge λ ein periodisches, starres Potential für die Ionen mit Gitterkonstante $\lambda/2$, wie in *Abbildung 3.4* schematisch dargestellt, und stellt damit den Potentialverlauf einer Oberfläche dar, an der die oberste atomare Schicht reibt.

An der PTB wurde ein anderer Ansatz verfolgt, in welchem zwei lineare Ionenketten direkt anein-

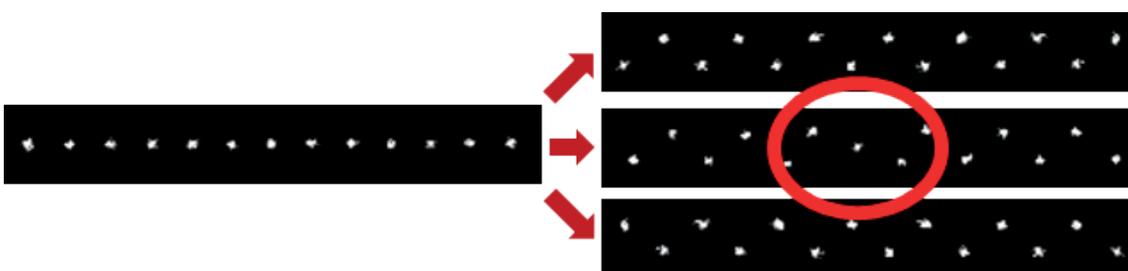
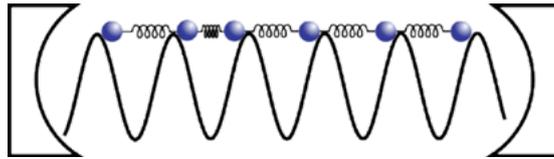


Abbildung 3.3: Spontane Symmetriebrechung im Phasenübergang von linear-zu-zick-zack Ionenkristallen mit möglicher Bildung eines topologischen Defekts (rot)

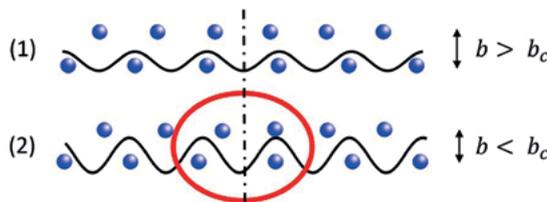
Abbildung 3.4: Linearer Ionenkristall in einem optischen Stehwellenpotential. Die Gitterkonstante des Ionenkristalls kann über das externe Fallenpotential angepasst werden, die des Stehwellenpotentials ist durch die verwendete Lichtwellenlänge vorgegeben. Die Gleichgewichtsposition des Kristalls wird durch das Stehwellenpotential beeinflusst.



ander reiben. Mithilfe der an der PTB hoch-präzise gefertigten Ionenfallen können sehr symmetrische und gutkontrollierte zweidimensionale Ionenkristalle gespeichert werden. Über das Einbringen eines Gitterdefektes, wie in **Abbildung 3.5** dargestellt, kann die Periodizität des Gitters gestört und das reibungsfreie Regime erreicht werden [7]. Damit kann der Aubry-Effekt in diesem gut zugänglichen System untersucht werden und der Einfluss von Defekten in Nanosystemen wie Molekülketten und Proteinen (z. B. der menschlichen DNS) emuliert werden.

Der Kristall ist ein selbstorganisiertes System mit zwei atomaren Lagen unterschiedlicher Gitterkon-

Abbildung 3.5: 2D-Ionenkristall mit delokalisiertem Defekt (1) und Spiegelsymmetrie. Die Wechselwirkung zwischen oberer und unterer Lage bildet das Reibungspotential. Durch Ändern des Ionenabstandes b lässt sich der Phasenübergang mit spontaner Symmetriebrechung herbeiführen (2) [7].



stanten. Das Verhältnis der Gitterkonstanten lässt sich über den Abstand b der beiden Lagen durch Einstellen einer Spannung anpassen. Die Reibung der beiden Ketten aneinander kann untersucht werden, indem die beiden Ionenketten mittels periodisch modulierter Lichtkräfte gegeneinander verschoben werden. Die herausragende Kontrollierbarkeit des Systems ermöglicht es, den angeregten Phononen-Zustand der Bewegung bei verschiedenen Modulationsfrequenzen spektroskopisch zu vermessen. Der Aubry-Übergang manifestiert sich dabei in einer Anregung hoher Bewegungsamplitude bei fast verschwindender Modulationsfrequenz für ein spezielles Verhältnis der Gitterkonstanten. Das Verhalten des Ordnungsparameters Φ gegen-

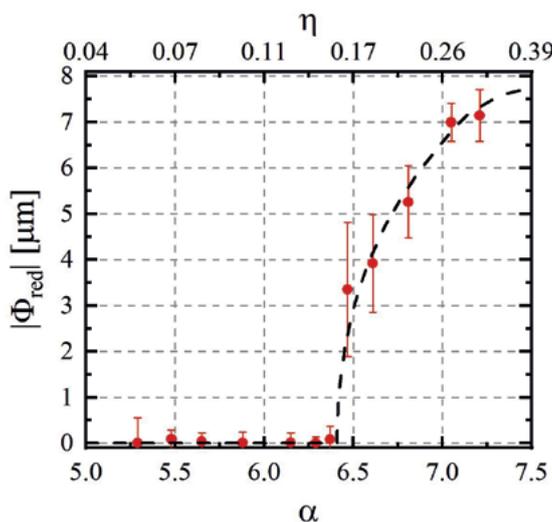


Abbildung 3.6: Verhalten des Ordnungsparameters im Fall des untersuchten Aubry-Übergangs [7]. Ab einem bestimmten Verhältnis der Fallengeometrie, bestimmt durch den Kontrollparameter α kommt es zu einem kontinuierlichen Anstieg des Ordnungsparameters Φ .

über dem den Phasenübergang treibenden Kontrollparameter α ist in **Abbildung 3.6** dargestellt und zeigt deutlich die Charakteristik eines Phasenübergangs zweiter Ordnung. Im verwendeten Modellsystem konnte so zum ersten Mal ein Aubry-artiger Phasenübergang an Ionenkristallen sowie auftretende nichtlineare Effekte, die diesen beeinflussen, beobachtet werden.

Aufbauend auf diesen experimentellen Resultaten wurde in einer Kollaboration mit dem Institut für theoretische Physik an der Leibniz Universität Hannover der Energietransport entlang eines zweidimensionalen Ionenkristalls mit topologischem Defekt studiert [19]. In dieser Arbeit wurde untersucht, wie ein topologischer Defekt verwendet werden kann, um den Energietransport und damit die thermische Leitfähigkeit entlang des Ionenkristalls zu steuern. Mithilfe der bestehenden experimentellen Plattform ist geplant, diesen Effekt erstmals experimentell nachzuweisen und die Quantenthermodynamik von atomaren Systemen zu erforschen. Was passiert beispielsweise an Phasenübergängen, wenn Quantenfluktuationen diesen dominieren? Wo treten beim Energietransport Quantenkorrelationen auf und wie langlebig sind sie? Dazu müssen Ionenkristalle nahe an Ihren absoluten Bewegungs-Grundzustand gekühlt werden. Neuartige Kühlmethode an großen Ionenkristallen werden hier erforscht und entwickelt, von denen auch die Bereiche der Quantenmetrologie und Quanteninformationstechnologie mit Coulomb Kristallen profitieren werden.

Quantencomputer und Quantensimulatoren

Auf dem Weg zu einem universellen Quantencomputer stellen gespeicherte Ionen und supraleitende Qubits aktuell die experimentell am weitesten fortgeschrittenen Plattformen dar. Alle Aspekte des Ionenfallen-Quantencomputers sind mittlerweile einzeln demonstriert worden; die Herausforderung liegt aktuell darin, dies auch in einem physikalischen System und mit möglichst hoher Güte der Gatteroperationen zu tun. Die dahinterstehende Frage ist, wie man mit den Fehlern umgeht, die ein Quantencomputer im Laufe einer Berechnung notwendigerweise macht. Auch für klassische Computerarchitekturen existieren ja Methoden der Fehlerkorrektur, die beispielsweise auf dem Prinzip der redundanten Speicherung beruhen. Quantenfehlerkorrektur ist ein Verfahren, das es einem Quantenrechner erlaubt, mit solchen Fehlern umzugehen. Damit dies effizient funktionieren kann, muss aber der Fehler pro Gatteroperation unter der sogenannten Fehler-toleranzschwelle von 10^{-4} liegen. Gatter mit möglichst niedriger Fehlerrate zu realisieren ist deshalb eine der großen Herausforderungen in diesem Feld.

An der PTB wird hier ein Ansatz verfolgt, der 2008 am NIST vorgeschlagen wurde [20] und 2011

erstmals realisiert werden konnte [21]. Im Gegensatz zu dem weit verbreiteten Ansatz, bei dem die Gatteroperationen mittels fokussierter Laserstrahlen realisiert werden, wird hier ein Mikrowellen-Nahfeld verwendet, welches mit atomaren Übergängen im Mikrowellenbereich resonant ist. Eine fundamentale Quelle von Fehlern ist beim Standard laserbasierten Ansatz die mit optischen Übergängen verknüpfte Spontanemission. Diese fällt bei dem Mikrowellenansatz komplett weg. Darüber hinaus ist die Kontrolle der benötigten Mikrowellenfelder mit der erforderlichen Präzision vergleichsweise einfacher zu realisieren als für Laserstrahlen. Als Quellen kommen Standard-Komponenten zum Einsatz, wie sie beispielsweise aus dem Radar- und Kommunikationsbereich bekannt sind. Eine Herausforderung ist allerdings, dass Fernfeld-Mikrowellenfelder in der Regel nicht in der Lage sind, die notwendigen Multi-Qubit-Operationen bereitzustellen. Dies wird erst dadurch ermöglicht, dass die Ionen sehr nah an eine bei der Zielfrequenz betriebene Leiterstruktur gebracht werden. Der Amplitudengradient des Mikrowellenfeldes stellt dann die notwendigen Kopplungen bereit. Hierfür sind spezielle Feld-Geometrien notwendig. An der PTB ist in den letzten Jahren eine Methode entwickelt worden [22], die es uns erlaubt, die Mikrowellen-Nahfelder von Leiterstrukturen, die in Oberflächen-Ionenfallen (siehe Artikel [Mikrostrukturierte Ionenfallen](#)) integriert sind, sehr genau zu berechnen. Im Ergebnis konnten wir eine Geometrie demonstrieren, welche es erlaubt, allein durch Anlegen eines Zwei-Ton Mikrowellensignals an eine solche Struktur ein Zwei-Qubit-Gatter niedriger Fehlerrate zu realisieren [23]. In einer Analyse gemeinsam mit Kollegen von der Leibniz Universität Hannover konnte gezeigt werden, dass die verbliebene Fehlerrate nicht durch eine Begrenzung in der Methode an sich gegeben war, sondern durch die zeitliche Stabilität der Bewegungsmoden der Ionen. Ebenfalls gemeinsam mit den Kollegen von der Leibniz Universität Hannover konnte gezeigt werden, dass sich dieser Effekt durch ein geschicktes Modulationsverfahren unterdrücken lässt.

Die aktuell demonstrierten Fehlerraten für Zwei-Qubit Gatter erreichen damit $3(1) \cdot 10^{-3}$ [24], nur noch etwas mehr als eine Größenordnung von der Fehlertoleranzschwelle entfernt. Es wird erwartet, dass sich diese Fehlerrate durch Einführung eines weiteren Kontrollfeldes signifikant weiter reduzieren lässt. Auch andere aktuelle Fehlerquellen lassen sich durch vergleichsweise einfache rein technische Maßnahmen signifikant reduzieren. Eine wesentliche Herausforderung stellt aber letztendlich die Messung und Charakterisierung so niedriger Fehlerraten dar. Der Präparations- und Messfehler muss dazu sehr genau verstanden und charakterisiert sein. Die genaue Realisierung und Charakterisierung von Quantengattern hat also

methodisch und praktisch sehr viel mit der Metrologie zu tun. Einen Ausweg stellt die repetitive Anwendung von mehreren Gattern dar, bei der der Fehler pro Operation aus dem Ergebnis als Funktion der Sequenzlänge ermittelt wird. Dazu braucht es aber schon einen kleinen, funktionalen Quantencomputer, denn eine solche Charakterisierung von Quantengattern stellt einen kleinen Algorithmus dar. Hierzu wird gerade ein neuer Chip entwickelt, der neben einem Register zum Kühlen und Auslesen von Ionen-Qubits auch zwei Speicherregister und ein Register zur Durchführung von Ein- und Zwei-Qubit-Gattern enthalten wird (siehe Beitrag [Mikrostrukturierte Ionenfallen](#) und Diskussion der QCCD-Architektur). Damit sollten sich Algorithmen mit deutlich über 10 Qubits realisieren lassen – bei Fehlerraten deutlich niedriger als der aktuelle Stand der Forschung, selbst für Ionen-Qubits, die typischerweise in Experimenten bis jetzt die absolut niedrigsten Fehlerraten zeigten. Auch in einem solchen Mikrowellen-basierten Ansatz werden noch Laser zur Kühlung und Zustandspräparation der Ionen benötigt. Diese müssen allerdings längst nicht so genau kontrolliert werden wie zur Durchführung von Gatteroperationen und benötigen um Größenordnungen geringere Leistungen, was ihren Einsatz unkritisch macht. Alle kohärenten Operationen (Quantengatter) werden hingegen wie beschrieben mittels Mikrowellenfeldern realisiert.

Der Nahfeld-Mikrowellenansatz ist darüber hinaus auch in Hinblick auf die Skalierung interessant, weil der Mechanismus, der die Gatteroperationen realisiert, direkt in eine skalierbare Mikrostruktur integriert ist. Ein solches Element zur Realisierung von Gatteroperationen lässt sich dann mit den Methoden der Mikrofabrikation im Prinzip beliebig häufig auf einem Multi-Register-Chip unterbringen. Dies eröffnet hervorragende Perspektiven für die Entwicklung eines Ionenfallen-Quantencomputers. Die Arbeiten an der PTB werden dabei unterstützt durch das EU Quantentechnologie „*Flagship*“ Projekt MicroQC gemeinsam mit Partnern in Siegen, Sussex, Jerusalem und Sofia.

Literatur

- [1] R.P. Feynman, „Simulating physics with computers“, *International Journal of Theoretical Physics* 21, 467 (1982)
- [2] J.I. Cirac und P. Zoller. „Quantum Computations with Cold Trapped Ions“, *Physical Review Letters* 74, 4091 (1995)
- [3] M. Peplow, „The tiniest Lego: a tale of nanoscale motors, rotors, switches and pumps“, *Nature* 525, 18–21 (2015)
- [4] M. Brandenbourger, X. Locsin, E. Lerner und C. Coullais, „Non-reciprocal robotic metamaterials“, *Nature communications* 10, 4608 (2019)

- [5] A. Ward, F. Hilitski, W. Schwenger, D. Welch, A. W. C. Lau, V. Vitelli, L. Mahadevan und Z. Dogic, „Solid friction between soft filaments“, *Nature Materials* 14, 583–588 (2015)
- [6] L. D. Landau, "On the theory of phase transitions", *Ukr. J. Phys.* 53, 25–35 (2008)
- [7] J. Kiethe, R. Nigmatullin, D. Kalincev, T. Schmirander und T.E. Mehlstäubler, „Probing nanofriction and Aubry-type signatures in a finite self-organized system“, *Nature communications* 8(1), 1–8 (2017)
- [8] L. V. Yakushevich, „Nonlinear physics of DNA“, John Wiley & Sons (2006)
- [9] F. Kühner, J. Morfill, R.A. Neher, K. Blank, and H.E. Gaub, „Force-induced DNA slippage“, *Biophysical journal* 92(7), 2491–2497 (2007)
- [10] S. W. Englander, N. R. Kallenbach, A. J. Heeger, J. A. Krumhansl und S. Litwin, „Nature of the open state in long polynucleotide double helices: possibility of soliton excitations“, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 77, 7222 (1980)
- [11] W. P. Su, J. R. Schrieffer und A. J. Heeger, „Solitons in Polyacetylene“, *Phys. Rev. Lett.* 42, 1698 (1979)
- [12] W. H. Zurek, „Cosmological experiments in superfluid helium?“, *Nature* 317 (6037), 505–508 (1985)
- [13] K. Pyka, J. Keller, H. L. Partner, R. Nigmatullin, T. Burgermeister, D.M. Meier, A. del Campo und T.E. Mehlstäubler, „Topological defect formation and spontaneous symmetry breaking in ion Coulomb crystals“, *Nature communications* 4(1), 1–6 (2013)
- [14] H. L. Partner, R. Nigmatullin, T. Burgermeister, J. Keller, K. Pyka, M.B. Plenio und T.E. Mehlstäubler, „Structural phase transitions and topological defects in ion Coulomb crystals“, *Physica B: Condensed Matter* 460, 114–118 (2015)
- [15] S. Ulm, J. Roßnagel, G. Jacob, C. Degünther, S. T. Dawkins, U. G. Poschinger, R. Nigmatullin, A. Retzker, M. B. Plenio, F. Schmidt-Kaler und K. Singer, „Observation of the Kibble-Zurek scaling law for defect formation in ion crystals“, *Nature Communications* 4, 2290 (2013)
- [16] S. Aubry, „The twist map, the extended Frenkel-Kontorova model and the devil's staircase“, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 7(1–3), 240–258 (1983)
- [17] A. Benassi, A. Vanossi und E. Tosatti, „Nanofriction in cold ion traps“, *Nature communications* 2(1), 1–5 (2011)
- [18] L. Timm, H. Weimer, L. Santos und T. E. Mehlstäubler, „Energy localization in interacting atomic chains with topological solitons“, *arXiv preprint arXiv:1910.02135* (2019)
- [19] C. Ospelkaus, C.E. Langer, J.M. Amini, K.R. Brown, D. Leibfried und D.J. Wineland, „Trapped-Ion Quantum Logic Gates Based on Oscillating Magnetic Fields“, *Physical Review Letters* 101, 090502 (2008)
- [20] C. Ospelkaus, U. Warring, Y. Colombe, K.R. Brown, J.M. Amini, D. Leibfried und D.J. Wineland, „Microwave quantum logic gates for trapped ions“, *Nature* 476, 181 (2011)
- [21] M. Wahnschaffe, H. Hahn, G. Zarantonello, T. Dubielzig, S. Grondkowski, A. Bautista-Salvador, M. Kohnen und C. Ospelkaus, „Single-ion microwave near-field quantum sensor“, *Applied Physics Letters* 110, 034103 (2017)
- [22] H. Hahn, G. Zarantonello, M. Schulte, A. Bautista-Salvador, K. Hammerer und C. Ospelkaus, „Integrated 9Be+ multi-qubit gate device for the ion-trap quantum computer“, *npj Quantum Inf.* 5, 70 (2019)
- [23] G. Zarantonello, H. Hahn, J. Morgner, M. Schulte, A. Bautista-Salvador, R.F. Werner, K. Hammerer, C. Ospelkaus, „Robust and Resource-Efficient Microwave Near-Field Entangling 9Be+ Gate“, *Physical Review Letters* 123, 260503 (2019)
- [24] [Kibble1976] T. W. B. Kibble, „Topology of cosmic domains and strings“, *J. Phys. A: Math. Gen.* 9(8), 1387–1398 (1976)