



Interferometrie – wie entlocke ich dem Licht eine Länge?

René Schödel*

1. Historisches und Einführung

Der Wunsch nach einem universellen Maß für die Länge reicht viele Jahrhunderte zurück. Im Mittelalter hatte sich eine Vielzahl regional verschiedener Längenmaße etabliert, welche zum Teil heute noch geläufig sind. Diese Diversität war ein Hemmnis für den zunehmend überregional werdenden Handel. Eine der ersten Ideen für ein universelles Längenmaß war das Sekundenpendel, vorgeschlagen von Abbé Jean Picard, 1668. Hierbei wurde der physikalische Zusammenhang zwischen der Länge eines Pendels und dessen Schwingungsdauer betrachtet. Allerdings zeigte sich, dass, bedingt durch regionale Unterschiede im Schwerfeld der Erde, die Schwingungsdauer eines solchen Pendels deutliche Unterschiede aufwies. Damit konnte diese Definition dem Anspruch an Universalität einer Länge nicht genügen. Nach der französischen Revolution setzte sich die Idee eines metrischen Einheitensystems durch. 1799 wurde das Urmeter als verkörpertes Längenmaß geschaffen, dessen Länge dem 10-millionstel der Entfernung vom Äquator bis zum Nordpol (Erdmeridianquadrant) entsprechen sollte. Dass diese Aussage nicht zutreffend war, da die Erde sich als keine perfekte Kugel und damit ungeeignet zur Definition des Meters erweisen sollte, und dass dieser Urmeter eigentlich 0,2 mm zu kurz geraten war, erkannte man später. Im Jahr 1889 führte das Internationale Büro für Maß und Gewicht (BIPM) den Internationalen Meterprototyp für die Einheit Meter, einen Stab aus einer Platin-Iridium-Legierung mit kreuzförmigem Querschnitt ein und legte die Länge des Meters als Abstand der Mittelstriche zweier Strichgruppen bei einer Temperatur von 0 °C fest.

Erst seit 1960 beruht die Definition des Meters nicht mehr auf einer zu bewahrenden Maßverkörperung bzw. dessen Kopien. Auf der 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht (CGPM) wurde der Meter als das 1 650 763,73-fache der Wellenlänge des von ⁸⁶Kr beim Übergang zwischen den Zuständen 5d5 und 2p10 ausgesandten Lichtes in Vakuum definiert. Diese Definition basierte maßgeblich auf einer, von Johann Georg Ernst Engelhard an der

PTB entwickelten, Krypton-86-Spektrallampe einer Wellenlänge von ca. 606 nm.

Mit der Festlegung eines Zahlenwerts für die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 wurde 1983 die derzeit international gültige Definition für den Meter beschlossen:

„Die Länge eines Meters ist die Strecke, die Licht im Vakuum innerhalb des Zeitintervalls von 1/299 792 458 Sekunden durchläuft.“

Diese Definition setzt eine Messmethode voraus, die es ermöglicht, die Länge entlang einer räumlichen Dimension, bzw. entlang verkörpernder Längenmaße darzustellen. Letztere haben ihre Bedeutung nämlich nicht verloren, sie dienen der Weitergabe der Maßeinheit Meter in die Industrie und Gesellschaft. Die Genauigkeit der Darstellung von Längen mittels geeigneter Längenmessverfahren befindet sich in einem stetigen Entwicklungsprozess, getriggert von neuen Anforderungen an die Genauigkeit. Die folgenden Kapitel dieses Beitrags sollen die Grundlagen dieser Verfahren beschreiben.

2. Die direkte Messung einer Zeitdifferenz zur Realisierung der SI-Basiseinheit Meter

Der Wortlaut der Definition „Ein Meter ist definiert als die Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299 792 458 Sekunden zurücklegt“ legt zunächst die Vorstellung einer direkten Zeitmessung im Zusammenhang mit einer Längenmessung nahe (1 m entspricht 3,335 640 952 ns). Tatsächlich wird beispielsweise die Entfernung Erde – Mond durch Bestimmung der Zeit, die ein Laserpuls von der Erde zum Mond und zurück benötigt, gemessen (etwa 2,6 Sekunden). Von amerikanischen und sowjetischen Mondmissionen wurden dazu insgesamt fünf Retroreflektoren auf dem Mond platziert. Damit konnte u. a. nachgewiesen werden, dass die mittlere Entfernung zwischen dem Mond und der Erde jährlich um etwa 3,8 cm zunimmt.

* Dr. René Schödel,
Fachbereich „Interferometrie an Maßverkörperungen“,
E-Mail:
rene.schoedel@ptb.de

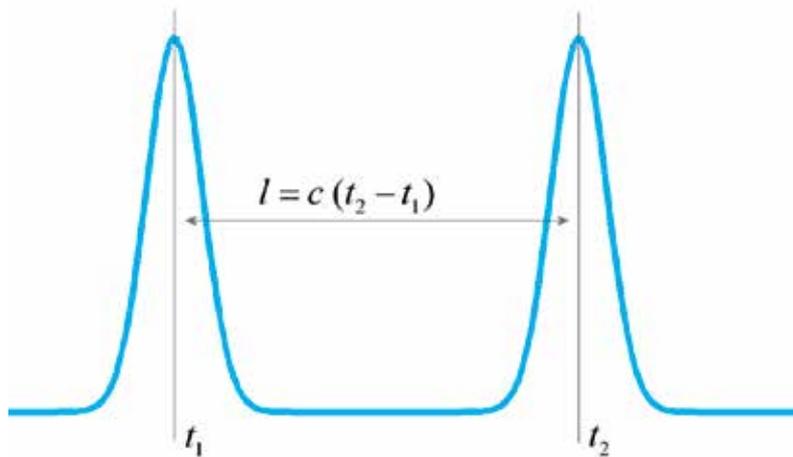


Bild 1: Zusammenhang zwischen einer Länge und der Laufzeitdifferenz von Licht

Licht-Laufzeit-basierte Entfernungsmessungen werden nicht nur im Weltraum angewendet, sondern kommen in einer Vielzahl von Messgeräten, z. B. in der Geodäsie (Tachymeter, globale Navigationssatellitensysteme), aber auch in handelsüblichen Entfernungsmessern zum Einsatz. Hierbei werden, je nach Anforderung an die Genauigkeit, verschiedene Modulations- und Mustererkennungstechniken angewendet. In jedem Fall muss der Einfluss der Luft auf die Lichtgeschwindigkeit berücksichtigt werden, da die Luftbrechzahl n diese herunterskaliert ($c = c_0/n$). Bei Vernachlässigung dessen wird, unter atmosphärischen Bedingungen, die Länge um ca. 0,3 mm pro Meter Messlänge zu lang gemessen. Für genaue Messungen ist es daher unerlässlich, die Parameter der Luft (Druck, Temperatur, Feuchte) entlang der Messstrecke zu erfassen, um damit den Einfluss der Luftbrechzahl korrigieren zu können. Da die Luftbrechzahl von der Wellenlänge abhängt (Dispersion) ist es bei laufzeitbasierten Messungen in Luft zudem wichtig, die tatsächlich detektierbare Signalgeschwindigkeit (Gruppengeschwindigkeit) zu betrachten, welche mit der sogenannten Gruppenbrechzahl zusammenhängt und sich aus der „normalen“ Brechzahl berechnen lässt.

Auch bei kürzeren Entfernungen lässt sich relativ einfach demonstrieren, dass eine Verlängerung des Lichtweges zu einer zeitlichen Verzögerung, z. B. eines Lichtimpulses, führt. Für genaue Längenmessungen im Bereich weniger Meter und darunter stößt diese Methode schnell an Genauigkeitsgrenzen, z. B. müsste bereits für eine 1-mm-genaue Längenmessung eines Meters die Zeitdifferenz auf ca. 3,3 ps genau gemessen werden.

3. Interferometrie zur Darstellung der SI-Basiseinheit Meter

Zur Längenmessung im Bereich weniger Meter und darunter, aber auch für die genaueste Darstellung einer Länge im Allgemeinen, bieten sich interferometrische Messverfahren an, mit denen sich Längenmessungen sub-nm-genau durchführen lassen. Im Folgenden soll die Grundidee der interferometrischen Längenmessung und deren Zusammenhang mit der genannten Definition des Meters erklärt werden.

Interferometrie ist eine Messmethode, die auf der Überlagerung von Wellen basiert. Das elektrische Feld einer einzelnen Lichtwelle mit Ausbreitung in z -Richtung lässt sich mathematisch beschreiben als $E(z,t) = A \cos[\varphi] = A \cos[\omega t - kz + \delta]$, mit den Kenngrößen A : Amplitude, φ : Phase, ω : Kreisfrequenz, k : Wellenzahl, δ : Anfangsphase. Der Zusammenhang der Größen ω und k mit den Parametern Wellenlänge λ und Frequenz ν besteht über $k = 2\pi/\lambda$ bzw. $\omega = 2\pi\nu$. Die Lichtgeschwindigkeit c entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenfronten, der sogenannten Phasengeschwindigkeit. Während der Periodendauer $T = 1/\nu$ bewegt sich die Wellenfront um eine Wellenlänge in Ausbreitungsrichtung, was sich aus der Betrachtung $\varphi = \text{const.}$ ergibt ($\omega t = kz$). Daraus resultiert der wichtige Zusammenhang $c = \lambda \nu$.

Da die Frequenz von Lichtwellen im Bereich 300 THz bis ca. 600 THz liegt, kann deren zeitliche Periodizität mit keinem Detektor direkt erfasst werden. Messbar ist lediglich die mittlere Intensität I einer Lichtwelle, welche im Wesentlichen¹ proportional zum Quadrat eines zeitlichen Mittelwertes des elektrischen Feldes ist. Mathematisch ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Intensität und Amplitude:

$$I = \langle E^2 \rangle_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t (E(t,z))^2 dt}{t} = \frac{A^2}{2} \tag{1}$$

Abgesehen von der Eigenschaft „Farbe“ offenbart eine einzelne Lichtwelle, aufgrund der extrem hohen Frequenz, nicht deren Welleneigenschaften. Erst die Überlagerung (Interferenz) mehrerer Wellen eröffnet einen Zugang, u. a. zur Wellenlänge. Um dies zu verdeutlichen wird im Folgenden die Intensität zweier, sich überlagernder Lichtwellen betrachtet:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= A_1 \cos[\varphi_1] \\ E_2 &= A_2 \cos[\varphi_2] \end{aligned} \right\} \rightarrow I = \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + A_1 A_2 \cos[\varphi_1 - \varphi_2] \tag{2}$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[\varphi_1 - \varphi_2]$$

$$= I_0 (1 + \gamma \cos[\varphi_1 - \varphi_2]),$$

worin γ den sogenannten Interferenzkontrast beschreibt,

$$\gamma = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

und $I_0 = I_1 + I_2$ gewählt wurde. Die Einzelphasen φ_1 und φ_2 beinhalten jeweils die Parameter Frequenz und Wellenlänge ($\varphi_{1/2} = \omega_{1/2} t - k_{1/2} z + \delta_{1/2}$). Überlagern sich zwei Lichtwellen gleicher Frequenz (und damit gleicher Wellenlänge), die sich entlang derselben Achse (in z -Richtung) ausbreiten, dann hat die resultierende Welle die gleichen Eigenschaften hinsichtlich dieser Parameter. Dies lässt sich für zwei Wellen gleicher Amplitude sehr einfach zeigen², wo sich:

$$E_1 + E_2 = A \cos[\omega t - kz + \delta_1] + A \cos[\omega t - kz + \delta_2] = 2A \cos[\omega t - kz + (\delta_1 + \delta_2)/2] \cdot \cos[(\delta_1 - \delta_2)/2]$$

ergibt. Die überlagerte Welle ist demnach keine sogenannte „stehende Welle“, sie breitet sich mit einer bestimmten Phasenverschiebung in die gleiche Richtung aus wie die Einzelwellen. Die Intensität dieser Welle ist im Wesentlichen durch die Verschiebung der Wellen zueinander bestimmt,

i. a. $I = I_0 (1 + \gamma \cos[\delta_1 - \delta_2])$ bzw.
 $I = I_0 (1 + \cos[\delta_1 - \delta_2])$ für
 $A_1 = A_2 = A \Rightarrow \gamma = 1$.

Bild 2 veranschaulicht die räumliche Überlagerung zweier identischer Wellen für drei verschiedene Phasenverschiebungen $\Delta\varphi = \delta_1 - \delta_2$. Jeweils rechts neben den Graustufendarstellungen sind die Intensitäten der Einzelwellen sowie jene der resultierenden Überlagerung eingezeichnet. Dieses Beispiel beinhaltet den Fall der vollständigen gegenseitigen Auslöschung (destruktive Interferenz) für Phasendifferenzen, die ungeradzahlige Vielfachen von π entsprechen sowie den Fall der konstruktiven Interferenz für geradzahlige Vielfache von π .

Interessanterweise wird hierbei offen sichtbar, dass, abhängig von der Verschiebung der Wellen zueinander, die Intensität der Überlagerung bei konstruktiver Interferenz ($\Delta\varphi = 0, 2\pi, \dots$) doppelt so groß ist wie die Summe der Intensitäten der Einzelwellen. Dieser „Widerspruch“ lässt sich jedoch einfach auflösen, indem man die Erzeugung der zur Interferenz fähigen Einzelwellen betrachtet. Bild 3 zeigt eine Anordnung, Interferometer genannt, in welcher eine Lichtwelle der Intensität I auf einen Strahlteiler trifft. Der Einfachheit halber hat der hier angenommene Strahl-

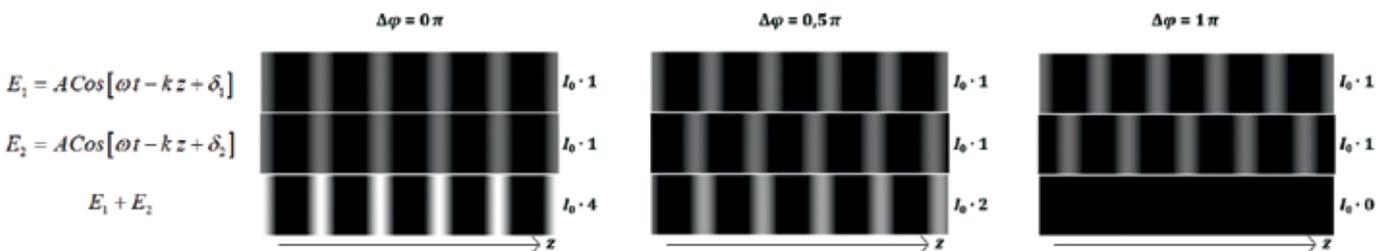


Bild 2: Räumliche Überlagerung zweier Wellen zu einem festen Zeitpunkt

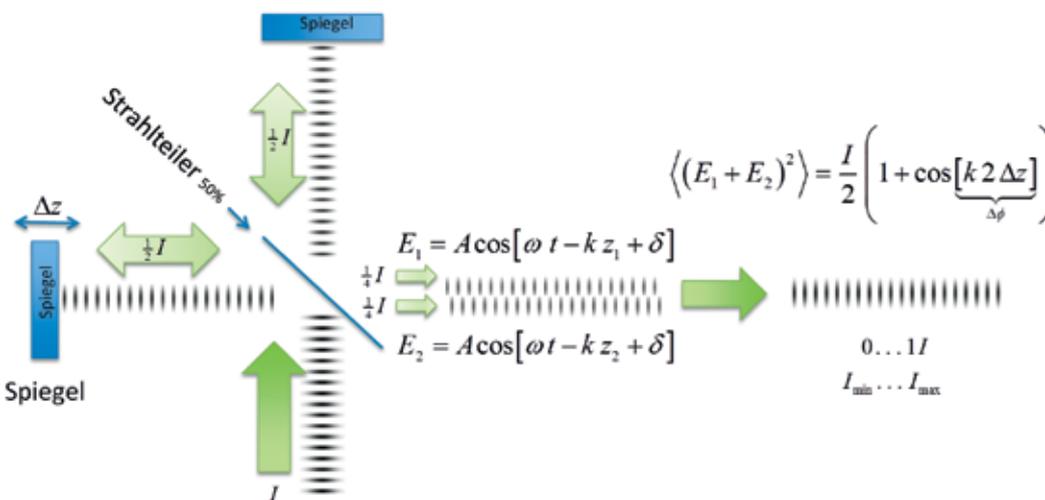


Bild 3: Erzeugung zweier zur Interferenz fähiger Lichtwellen mittels eines Interferometers, betrachtet zu einem festen Zeitpunkt

¹ Streng genommen ist die Intensität einer elektromagnetischen Welle, d. h. deren Leistungsdichte, definiert als zeitlicher Mittelwert des sogenannten Poynting-Vektors $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$. Die Dichte des elektrischen Feldes \vec{E} ist i. Allg. proportional der des magnetischen Feldes \vec{H} . Der Einfachheit halber werden hier alle Proportionalitätsfaktoren = 1 gesetzt.

² $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

teiler ein Verhältnis von genau 50 % Transmission zu 50 % Reflexion und die Spiegel, auf welche die Lichtwellen treffen, sind identisch und jeweils exakt senkrecht zur Strahlrichtung „justiert“. Der Strahlteiler ist so eingestellt, dass sich die an den beiden Spiegeln reflektierten Lichtwellen am Ausgang des Interferometers exakt überlagern. Der zweifache Durchgang durch den Strahlteiler reduziert die Intensität der Einzelstrahlen auf jeweils ein Viertel. Unterschiede in der zurückgelegten optischen Weglänge der beiden Wellen führen zu einer Phasenverschiebung $\Delta\varphi = k 2 \Delta z$, welche wiederum die Intensität des Lichtes am Ausgang des Interferometers bestimmt. Die maximale Intensität ist jedoch niemals größer als die Intensität der in das Interferometer einlaufenden Welle, wie in Bild 3 verdeutlicht³.

Um zu erklären, warum es mittels eines Interferometers gelingt, die genannte SI-Definition für den Meter zu realisieren, sei nochmals ein Interferometer gezeigt, allerdings ohne die idealisierten Einschränkungen, wie sie in Bild 3 getroffen wurden. Bild 4, links, veranschaulicht den allgemeinen Fall eines sogenannten Zweistrahlinterferometers, d. h. für beliebige Teilungsverhältnisse zwischen der Intensität des Referenzstrahls und dem sogenannten Messstrahl. Während der Referenzspiegel als unveränderlich (stabil) angesehen wird, lässt sich die Position des Messspiegels verändern. Da der Phasenunterschied in Gleichung (2) hierbei durch die Längendifferenz $2 \Delta z$ hervorgerufen wird ($\Delta\varphi = k 2 \Delta z = 2\pi \Delta z / \lambda$), verändert sich dabei die mittels eines Detektors gemessene Intensität periodisch (siehe Bild 4, rechts). Wie stark Maxima und Minima ausgeprägt sind, hängt vom Verhältnis $a = I_1/I_2$, welches den Interferenzkontrast

$\gamma = 2\sqrt{a} / (a + 1)$ bestimmt, ab. Bemerkenswert ist, dass die Interferenz selbst bei einem extrem ungünstigen Intensitätsverhältnis von 1/1000 noch sichtbare Variationen aufweist, die sich messtechnisch erfassen lassen. Im einfachsten Fall ist es ausreichend, während der Verschiebung des Messspiegels die Zahl der Perioden – Interferenzordnungen genannt – zu zählen ($\Delta\varphi / 2\pi = 1, 2, \dots$).

In jedem Fall lässt sich eine Verschiebung, bzw. eine Länge ausdrücken als Vielfaches der halben Wellenlänge multipliziert mit der Anzahl von Interferenzordnungen und damit auch als ein Produkt aus der Lichtgeschwindigkeit und einer Zeitdifferenz Δt :

$$\Delta z = \frac{\lambda}{2} \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2} \underbrace{c}_{\text{Lichtgeschwindigkeit}} \cdot \underbrace{\Delta t}_{\text{Laufzeit(-Differenz) von Licht}}, \quad (3)$$

wobei Δt den Zeitunterschied für das Auftreffen der Wellenfronten (oder auch von Lichtimpulsen, wenn diese in dasselbe Interferometer geleitet würden) auf den Detektor beschreibt:

Ergebnis der Messung mittels Interferometrie

$$\Delta t = \frac{1}{\underbrace{\nu}_{\text{Frequenz des Lichtes}}} \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \quad (4)$$

Gleichung (3) stellt klar den Zusammenhang zwischen der Laufzeit von Licht und der damit verbundenen Länge dar – genau wie es in der Definition für den Meter nach dem SI formuliert ist. Gleichung (5) sagt aus, was für die Bestimmung der Zeitdifferenz bekannt sein bzw. gemessen werden muss:

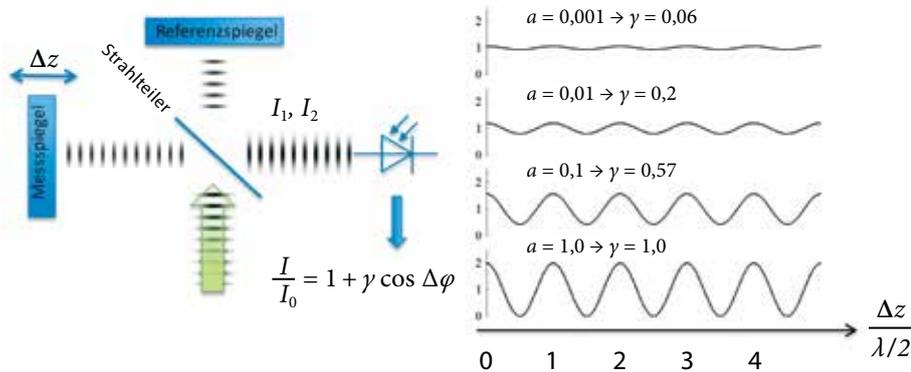


Bild 4: Erzeugung zweier zur Interferenz fähiger Lichtwellen mittels eines Interferometers (links). Im rechten Bereich ist die Intensität als Funktion der Verschiebung des Messspiegels für verschiedene Intensitätsverhältnisse ($a = I_1/I_2$) dargestellt.

- 1.) Die Frequenz des Lichtes ν .
- 2.) Die sich durch Veränderung eines Abstandes im Interferometer bzw. durch verschiedene Längen ergebende Phasendifferenz der Interferenz.

Längenmessende Interferometer werden zum überwiegenden Teil in Luft verwendet. Wie bei der direkten Messung von Laufzeitunterschieden (siehe Kapitel 2) führt das Medium Luft zu einer Reduktion der Lichtgeschwindigkeit, d. h. in Gleichung (3) muss λ durch λ/n bzw. c durch c_0/n ersetzt werden. Die Verringerung der

³Die Frage, wo denn die Energie im Fall der vollständigen Auslöschung am Interferometerausgang bleibt, deckt auf, dass die zum Eingang des Interferometers zurückreflektierten Strahlen in Bild 3 nicht eingezeichnet sind.



Lichtgeschwindigkeit wird durch eine Vergrößerung der zu messenden Phasendifferenz bzw. Zeitdifferenz kompensiert, sodass eine Länge unabhängig davon dargestellt werden kann, ob die Messung in Vakuum oder in Luft stattfindet.

Der Vollständigkeit halber sei hier die für die Darstellung der Länge mittels Interferometrie fundamental wichtige Gleichung gänzlich genannt:

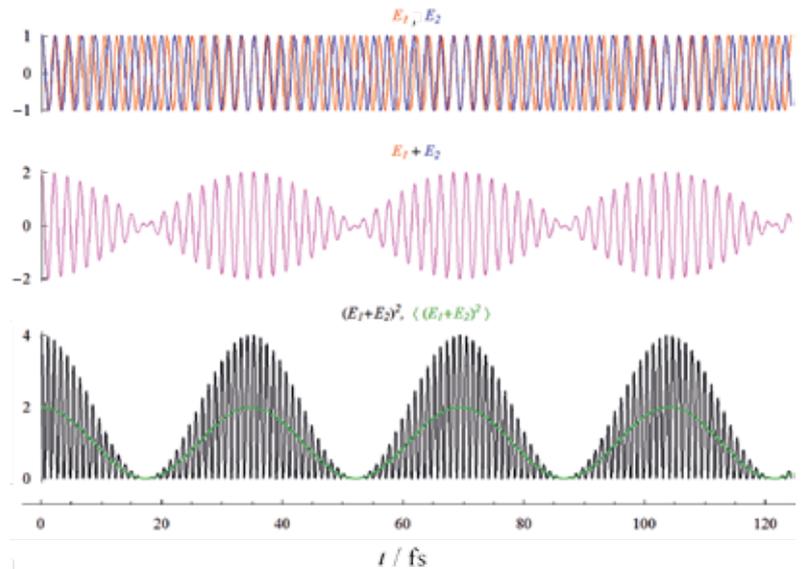
$$\Delta z = \frac{\lambda_0}{2n} \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\lambda_0}{2n} (i + q), \quad (5)$$

in welcher λ_0 die Größe der sogenannten Vakuumwellenlänge, i den ganzzahligen Wert der Interferenzordnungen und q den sogenannten Interferenzbruchteil bezeichnet.

3.1. Optische Frequenznormale

Die Kenntnis der Frequenz ν des Lichtes ist eine notwendige Bedingung für die Darstellung der Länge mittels Interferometrie (siehe Gleichung (4)). Der hieraus abgeleitete Wert der Vakuumwellenlänge ($\lambda_0 = c_0/\nu$) ist jedoch rein fiktiv, da er keine geometrisch relevante Länge sondern den Abstand zwischen Wellenfronten unter idealisierten Bedingungen und im Vakuum beschreibt.

Zur Darstellung der Frequenz einer geeigneten Lichtquelle muss diese Frequenz mit der der primären Zeitnormale (z. B. der Frequenz der Cs-Atomuhren der PTB) verglichen werden. Dazu bedient man sich heutzutage sogenannter Frequenzkammgeneratoren. Mit diesen lassen sich die Frequenzen von optischen Frequenznormalen mit relativen Unsicherheiten von 10^{-15} und darunter darstellen [1]. Um die Frequenz eines sekundären Frequenznormals, z. B. eines Lasers, der für interferometrische Längenmessungen eingesetzt werden soll, an jene einer geeigneten Kammlinie des synchronisierten Frequenzkamms anzuschließen, werden die verschiedenen Lichtquellen auf einem Detektor überlagert, d. h. zur Interferenz gebracht. Bild 5 veranschaulicht das Ergebnis der Interferenz zweier Wellen an einem festen Ort, deren Frequenz sich etwas voneinander unterscheidet, als Funktion der Zeit (entsprechend Gleichung (2)). Im unteren Bereich der Abbildung ist die Intensität dargestellt. Die grüne Kurve zeigt die mittlere Intensität innerhalb einer Periode. Diese entspricht dem sogenannten Schwebungssignal, welches sich aufgrund seiner, im Vergleich zu den Frequenzen der einzelnen Lichtquellen, deutlich kleineren Frequenz ($\nu_{\text{Schwebung}} = |\nu_1 - \nu_2|$) detektieren lässt. Um den Zusammenhang anschaulich darstellen zu können, wurden in Bild 5 unrealistische Annahmen zu den Einzelwellen getroffen ($\lambda_1 = 630 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 670 \text{ nm}$, $\nu_{1/2} = c/\lambda_{1/2}$). In realen Frequenzvergleichen liegen die zugrunde liegenden Frequenzen deutlich dichter beieinander,



sodass sich beobachtbare Schwebungsfrequenzen im Hz-, kHz- bzw. MHz-Bereich ergeben. Die Frequenz einer zu kalibrierenden Lichtquelle ($\nu_{\text{Prüfling}}$) ergibt sich aus der Frequenz eines Normals (ν_{Normal}) zu $\nu_{\text{Prüfling}} = \nu_{\text{Normal}} \pm \nu_{\text{Schwebung}}$. Die Uneindeutigkeit dieses Zusammenhangs ist der Tatsache geschuldet, dass die Schwebungsfrequenz lediglich den Betrag der Frequenzdifferenz angibt ($\nu_{\text{Schwebung}} = |\nu_{\text{Normal}} - \nu_{\text{Prüfling}}|$). Um Eindeutigkeit herzustellen, müssen demnach mehrere Normalfrequenzen zur Verfügung stehen.

Als praktikable Lichtquellen für den Einsatz in der interferenziellen Längenmessung erweisen sich die vom *Comité International des Poids et Mesures* (CIPM) empfohlenen Lichtquellen, deren Frequenz jeweils durch Stabilisierung von Lasern auf molekulare Hyperfeinstruktur-Übergänge gegeben ist [2]. Hierbei werden relative Unsicherheiten der Frequenz von typischerweise $< 10^{-11}$ erreicht.

Heutzutage werden optische Frequenznormale überwiegend mit dem Ziel weiterentwickelt, zukünftig die Darstellung der Zeit mit, im Vergleich zu heutigen Cs-Atomuhren noch genaueren, sogenannten optischen Uhren zu übernehmen. Derzeit werden schon relative Unsicherheiten der Frequenz von $< 10^{-16}$ erreicht [4], abhängig von der betrachteten Mittelungszeit. Von diesen Verbesserungen kann – im Gegensatz zur Situation bis vor ca. 30 Jahren – die Darstellung der Länge mittels Interferometrie nicht mehr profitieren, da die Frequenz des Lichtes geeigneter Quellen nur einen verschwindend kleinen Anteil zur Messunsicherheit der Länge beiträgt.

3.2. Abstands-scannende Interferometer

Im vorherigen Abschnitt (siehe Bild 4 und Text dazu) wurde bereits das Grundprinzip der scannenden Interferometer genannt: die Beobachtung

Bild 5: Überlagerung zweier Lichtwellen, deren Frequenz voneinander abweicht, betrachtet an einem festen Ort. Um sowohl die Grundschiwingung (hochfrequenter Anteil) als auch die Schwebung (niedrigfrequenter Anteil) einer Lichtwelle zu verdeutlichen, wurden folgende Parameter benutzt:
 $\lambda_1 = 630 \text{ nm}$,
 $\lambda_2 = 670 \text{ nm}$,
 $\nu_{1/2} = c_0/\lambda_{1/2}$

des sich periodisch verändernden Detektorsignals der Interferenzintensität während einer stetigen Veränderung des Abstandes eines Messspiegels, wobei der Referenzspiegel als stabil angesehen wird. Jede Periode entspricht einer Interferenzordnung, d. h. einer Abstandsänderung um die halbe Wellenlänge des verwendeten Lichtes (Gleichung (5)). Das bedeutet, dass z. B. bei Verwendung von rotem Laserlicht der Wellenlänge 633 nm für einen Meter ca. 3 Millionen Interferenzordnungen gezählt werden müssen. Während dieser Zeit müssen Erschütterungen, aber auch Luftverwirbelungen ausgeschlossen werden. Grundsätzlich können mit heute zur Verfügung stehenden Laserlichtquellen (Kohärenzlängen im km-Bereich), auch sehr große Entfernungen gemessen werden. Um gegen Verkipfungen der Spiegel unempfindlich zu sein, werden diese als Retrospiegel ausgeführt.

Da die Interferenz maßgeblich durch die Kosinusfunktion (siehe Gleichung (2)) bestimmt wird, lässt sich aus einem vom Detektor gemessenen periodischen Signal jedoch nicht die Richtung bestimmen, in welche der Messspiegel bewegt wird. Im Extremfall kann sogar eine Vor-Rück-Bewegung eine gleichmäßige Bewegung entlang einer Achse vortäuschen. Verschiedene Möglichkeiten einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Detektorintensität und der Position des Messspiegels herzustellen sind im Folgenden beschrieben.

3.2.1. Das Quadraturverfahren

Beim sogenannten Quadraturverfahren (siehe Bild 5) trifft ein Laserstrahl, dessen Polarisationsachse um 45° gegenüber der Ebene geneigt ist, auf einen Polarisationsstrahlteiler, welcher das ein-

fallende Licht in die beiden zueinander senkrecht stehenden Polarisationsrichtungen aufteilt, d. h. in die parallel zur Einfallsebene polarisierte Komponente (p-Strahl) die den Strahlteiler vollständig passiert und die senkrecht polarisierte Komponente (s-Strahl) die vollständig reflektiert wird. Diese beiden Strahlen werden an Retrospiegeln reflektiert und an dem polarisierenden Strahlteiler wieder zusammengeführt. Am Ausgang des Interferometers liegen dann zwei senkrecht zueinander polarisierte Strahlen vor⁴. Hinter einem weiteren Strahlteiler befinden sich jeweils Polarisatoren vor einem Detektor, deren Achse um 45° geneigt ist und damit die Projektion beider Polarisationskomponenten (s und p) auf die Polarisationsachse des jeweiligen Polarisators bewirken. Nur dadurch ist es möglich, dass die zunächst senkrecht zueinander polarisierten Strahlen zu einem beobachtbaren Interferenzsignal führen. Der an dem Strahlteiler reflektierte Strahl durchläuft vor dem Polarisator noch eine λ/4-Verzögerungsplatte und erzeugt deshalb an dem oberen Detektor ein Signal, das gegenüber dem Signal des anderen Detektors um π/2 verschoben ist. Dieses Verfahren liefert daher zwei zueinander um π/2 verschobene Signale der Interferenz, welche Sinus- bzw. Kosinus-Signale genannt werden. Elektronisch aufbereitet, d. h. befreit vom konstanten Anteil und geeignet skaliert, können diese Signale \tilde{I}_{\sin} und \tilde{I}_{\cos} wie in Bild 6, rechts dargestellt werden, z. B. mittels eines Oszilloskops im xy-Betrieb. Eine Verschiebung des Messspiegels führt dann zu einer kreisförmigen bzw. elliptischen Figur auf dem Bildschirm. Je nach Bewegungsrichtung dreht sich der entsprechende Vektor in die eine oder in die andere Richtung. Ein voller Umlauf entspricht dabei einer

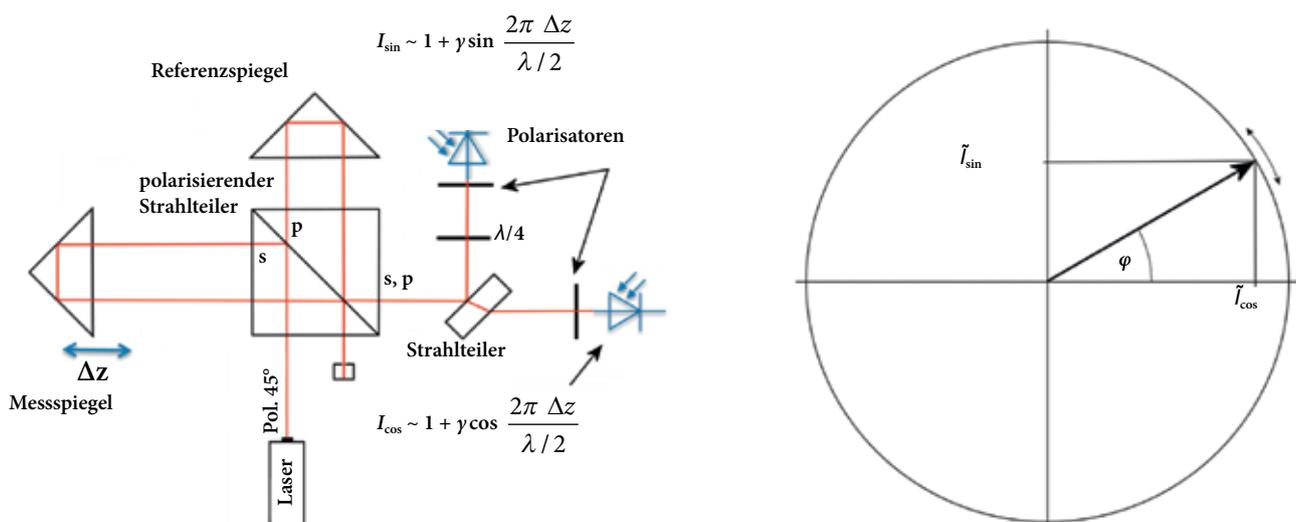


Bild 6: Erweiterung eines Interferometers durch polarisationsoptische Komponenten zur Erzeugung zweier um π/2 zueinander phasenverschobener Interferenzsignale (links). Rechts ist der sich aus den Signalen \tilde{I}_{\sin} und \tilde{I}_{\cos} ergebende Vektor gezeichnet.

⁴ Die Überlagerung zueinander senkrecht polarisierter Lichtwellen führt nicht zu einer beobachtbaren Interferenz.



Interferenzordnung ($\Delta\varphi = 2\pi$) und damit einer Verschiebung des Messspiegels um $\Delta z = \lambda/2$, die sich mit diesem Verfahren eindeutig erfassen lässt. Das Quadraturverfahren eignet sich ideal zur Kalibrierung von Entfernungsmessgeräten und Strichmaßverkörperungen, z. B. mittels der 50-m-Basisstrecke der PTB [5]. Diese ist mit einem verfahrbaren Messwagen ausgestattet, dessen Führungsschienen auf Betonsockeln ruhen, welche fest mit dem Boden eines 50 m langen Keller-Messraumes verbunden sind.

3.2.2. Das Heterodynverfahren

Einige Laser emittieren zwei zueinander senkrecht polarisierte Lichtwellen unterschiedlicher Frequenz (d. h. zwei verschiedene Lasermoden). Weiterhin gibt es Möglichkeiten, z. B. mittels akkustooptischer Modulatoren (AOM), die Frequenz einer Lichtwelle um einen definierten Betrag zu verschieben. Die Verfügbarkeit von Lichtwellen, deren Frequenzen sich um einen bekannten Betrag unterscheiden, macht man sich mit sogenannten Heterodyn-Interferometern⁵ zunutze. Bild 7 zeigt eine typische Bauweise eines Heterodyn-Interferometers. Als Lichtquelle dient hierbei ein Laser mit zwei unterschiedlichen Frequenzen. Die Lichtwelle, deren elektrisches Feld senkrecht zur Bildebene polarisiert ist, wird mit s, die parallel polarisierte Welle mit p bezeichnet. Zunächst werden beide Lichtwellen mittels eines Strahlteilers auf einen Polarisator, dessen Achse um 45° zu den beiden Polarisationsrichtungen geneigt ist. Dadurch entsteht an dem dahinter liegenden Detektor eine Schwebungsinterferenz (siehe Kapitel 3.1.) der nunmehr gleich polarisierten Wellen unterschiedlicher Frequenzen (ν_1 und ν_2), das sogenannte Referenzsignal. Die beiden am Strahlteiler transmittierten Lichtwellen treffen im weiteren Verlauf auf einen polarisierenden Strahlteiler, an welchem die s-polarisierte Welle reflektiert und die p-polarisierte Welle transmittiert wird. Nach der Reflexion an den Retrospeiegeln werden die beiden Wellen im polarisierenden Strahlteiler zusammengeführt und durchlaufen einen Polarisator, dessen Achse wiederum 45° zu den beiden Polarisationsrichtungen geneigt ist, sodass an dem dahinter liegenden Detektor eine zweite Schwebungsinterferenz entsteht, das sogenannte Messsignal.

Die Phase des Referenzsignals, Φ_{Ref} ergibt sich aus der Phasendifferenz der zu den unterschiedlichen Frequenzen gehörenden Einzelphasen, $\varphi_{1/2}^{\text{Ref}} = k_{1/2} z^{\text{Ref-Detektor}} - \omega_{1/2} t + \delta_{1/2}$, worin $z^{\text{Ref-Detektor}}$ den gemeinsamen Lichtweg der Einzelwellen bis zum Referenzdetektor beschreibt. Die Phase des Messsignals, Φ_{Mess} ergibt sich hingegen aus

der Überlagerung von Einzelwellen, die unterschiedliche Wege zurückgelegt haben. Definiert man Δz als Längendifferenz zwischen Messlänge und Weg zum Referenzspiegel, $z^{\text{Ref-Spiegel}}$, so ergibt sich das Messsignal aus der Differenz von

$$\varphi_2^{\text{Mess}} = k_2 (z^{\text{Ref-Spiegel}} + \Delta z) - \omega_2 t + \delta_2 \quad \text{und}$$

$$\varphi_1^{\text{Mess}} = k_1 z^{\text{Ref-Spiegel}} - \omega_1 t + \delta_1 .$$

Betrachtet man $z^{\text{Ref-Detektor}}$ und $z^{\text{Ref-Spiegel}}$ als konstant und setzt diese o. B. d. A. gleich, dann lassen sich die Phasen beider Detektoren und deren Differenz zueinander wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{Ref}} &= (k_2 - k_1) z^{\text{Ref}} - (\omega_2 - \omega_1) t + \delta_2 - \delta_1 \\ \Phi_{\text{Mess}} &= (k_2 - k_1) z^{\text{Ref}} + k_2 \Delta z - (\omega_2 - \omega_1) t + \delta_2 - \delta_1 \\ \Phi_{\text{Mess}} - \Phi_{\text{Ref}} &= k_2 \Delta z \end{aligned} \quad (6)$$

Dies bedeutet, dass aus dem Vergleich der Phasenlage zwischen den Schwebungssignalen am Referenzdetektor und am Messdetektor die Verschiebung Δz des Messspiegels bestimmt werden kann. Beide Signale können durch kapazitive Kopplung vom Gleichspannungsanteil befreit werden, was das Verfahren unempfindlich gegenüber Schwankungen der Lichtintensität macht – Einflüsse durch das Umgebungslicht eingeschlossen. Die Interpolation eines Interferenzsignals, wie im homodynen Interferometer üblich, entfällt ebenso wie das Problem mit der Richtungsumkehr, da die Phasenlage der Schwebung jeweils zunimmt und damit die Phasendifferenz zwischen Mess- und Referenzsignal eindeutig bestimmbar ist. Eines der derzeit genauesten Heterodyn-Interferometer wurde vor einigen Jahren an der PTB aufgebaut [6].

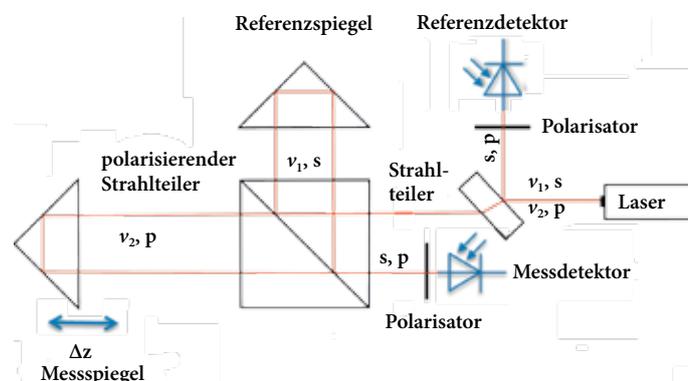


Bild 7: Schematische Darstellung eines Heterodyn-Interferometers, welches mit Laserlicht zweier zueinander senkrecht polarisierter Wellen (s und p) unterschiedlicher Frequenzen (ν_1 und ν_2) betrieben wird

⁵ Als Gegenstück dazu werden Interferometer, welche eine Lichtquelle mit nur einer einzelnen Frequenz benutzen, auch Homodyn-Interferometer genannt

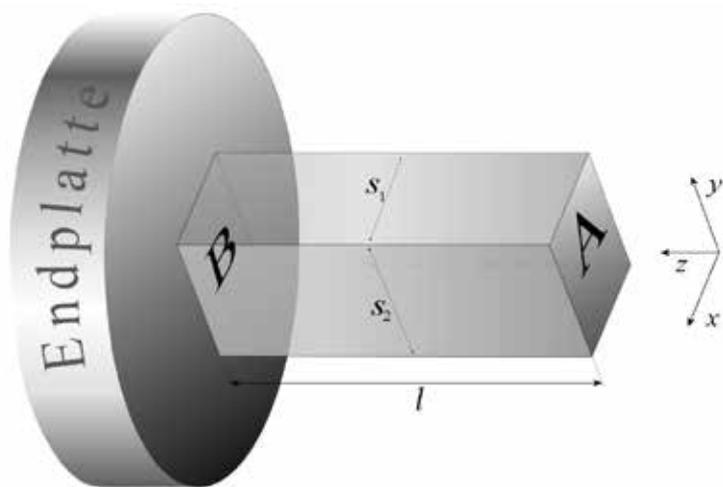
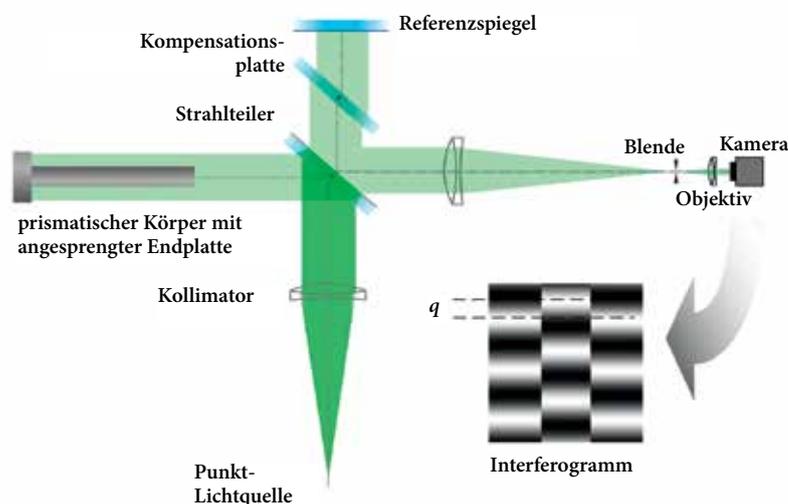


Bild 8: Prismatischer Körper mit zueinander parallelen Endflächen A und B, verbunden mit einer Endplatte durch Anschieben

3.3 Abbildende Interferometer zur Messung der Länge von Körpern

Bislang wurde die Länge als Abstand entlang einer Achse betrachtet. Durch die Verschiebung eines Interferometerspiegels entlang der Ausbreitungsrichtung von Licht kann diese Länge, durch Zählen von Interferenzordnungen wie oben beschrieben, direkt interferometrisch und damit rückführbar auf die SI-Definition bestimmt werden. Der folgende Abschnitt beschreibt eine andere Messaufgabe: die Bestimmung der Länge von Körpern. Hierbei sind jene Körper von besonderem Interesse, die sich als Maßverkörperung zur Weitergabe einer Länge eignen: 1) Körper mit zueinander parallelen Endflächen (prismatische Körper), oftmals in der Form sogenannter Parallelendmaße und 2) kugelförmige Körper, d. h. Kugeln. Die Länge bzw. der Durchmesser dieser Maßverkörperungen kann interferometrisch bestimmt werden, in den meisten Fällen wird die Länge als Stufenhöhe dargestellt. Bild 8 zeigt einen prismatischen Körper, dessen spiegelnde Endflächen A und B parallel zueinander sind und dessen Fläche B mit der Ebene einer Endplatte zusammenfällt. Körper und Platte werden

Bild 9: Twyman-Green-Interferometer zur Darstellung der Länge prismatischer Körper. Das im Bild unten rechts dargestellte Interferogramm symbolisiert den Interferenzbruchteil, der sich bei leicht geneigtem Referenzspiegel aus dem Streifenversatz ablesen lässt.



hierbei durch Adhäsion (bzw. Kohäsion) zusammengehalten. Tatsächlich lässt sich dieser Zustand durch sogenanntes Anschieben (bzw. Ansprengen oder auch „optisches Kontaktieren“ genannt) erreichen. Die Stufenhöhe ist damit im Prinzip identisch mit der Länge des Körpers.

Die in Bild 8 gezeigte Anordnung kann anstelle eines Messspiegels in ein Interferometer (z. B. wie in Bild 4) eingesetzt werden. Je nachdem, ob der Lichtstrahl von der Frontfläche des Körpers oder von der Endplatte reflektiert würde, ergäbe sich ein anderes Signal der Interferenz am Detektor. Man könnte versuchen, die Interferenz von mehreren, räumlich getrennten Strahlen, die zum einen an der Körper-Frontfläche bzw. an der Endplatte reflektiert werden, mittels verschiedener Detektoren vergleichend zu betrachten, um daraus auf die Länge zurückzuschließen. Allerdings erscheinen abbildende Verfahren unter Ausnutzung eines großen Strahlenbündels, wie unten beschrieben, deutlich besser geeignet. In jedem Fall gibt es hierbei keinen direkten Zugang zu der i. Allg. sehr großen Zahl ganzer Interferenzordnungen zwischen Frontfläche und Endplatte, d. h. es kann zunächst nur der Unterschied im nichtganzzahligen Rest der Interferenzordnungen bestimmt werden, der Interferenzbruchteil q .

3.3.1. Abbildende Twyman-Green-Interferometer

Bild 9 zeigt ein abbildendes Twyman-Green-Interferometer zur Darstellung der Länge prismatischer Körper. Eine Punktlichtquelle im Brennpunkt eines Kollimators erzeugt ein großes Parallelstrahlenbündel, welches den prismatischen Körper zusammen mit dessen Endplatte abdeckt. Nach Reflexion und Rückkehr zur Ebene des Strahlteilers geht das Licht einen „quasi gemeinsamen“ Weg bis zu einer Kamera, welche ein sogenanntes Interferogramm aufnimmt. Somit werden die Interferenzintensitäten für jeden Teilstrahl des Strahlenbündels lateral aufgelöst. Da der Referenzstrahl einmal mehr am optisch dichteren Medium (Strahlteiler-Außenfläche) reflektiert wird als der Messstrahl, kehrt sich das Vorzeichen des Interferenzterms – verglichen mit Gleichung (2) – in folgender Schreibweise um:

$$I = I_0 \left\{ 1 - \gamma \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda/2} (z_1(x, y) - z_2(x, y)) \right] \right\}, \quad (7)$$

wobei $z_{1/2}(x, y)$ die Verteilung der geometrischen Wege (Mess: 1, Referenz: 2) senkrecht zur optischen Achse darstellt. Sind die reflektierenden Flächen perfekt eben, so beschreibt die Wegdifferenz $z_1(x, y) - z_2(x, y)$ eine Ebene, deren Neigung von der Ausrichtung der Flächen zueinander abhängt. Die Kosinus-Funktion sorgt dann für das typische Streifenmuster mit Maxima für Wegdifferenzen von $m\lambda/2$ und Minima für $(m + 1/2)\lambda/2$.



3.3.1.1. Phasenverschiebeinterferometrie

Bei der Phasenverschiebeinterferometrie wird die Länge des Interferometer-Referenzarmes schrittweise um den äquidistanten Betrag α verschoben. Aus den sich für jede dieser Position ergebenden Intensitäten lässt sich die Phase φ der Interferenz bestimmen. Hierfür gibt es viele verschiedene Algorithmen. Beim Tang-Algorithmus [7] werden beispielsweise fünf Positionen betrachtet. Die Abbildung rechts soll den Zusammenhang zwischen den Intensitäten $I_1 \dots I_5$ und der Interferenzphase φ verdeutlichen:

Dies nutzt man experimentell aus, um die Interferenzphase aus einer Reihe gemessener Intensitäten zu bestimmen. In der abgebildeten Interferometrie werden für jede Position mittels Kamera Interferogramme aufgenommen. Für jede Pixelkoordinate kann mittels des Tang-Algorithmus die Interferenzphase berechnet werden.

Dem theoretisch zugrunde liegenden Zusammenhang $I_k = I_0 \{1 - \gamma \cos[\varphi + (k-3)\alpha]\}$

entspricht nach Tang die Interferenzphase:

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{[(I_2 - I_3) + (I_1 - I_4)][3(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)]}}{I_2 + I_3 - I_1 - I_4}$$

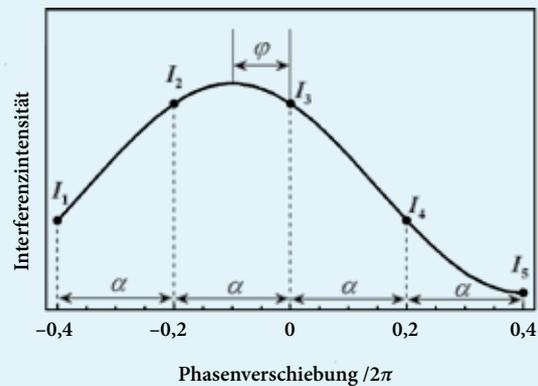


Bild 10

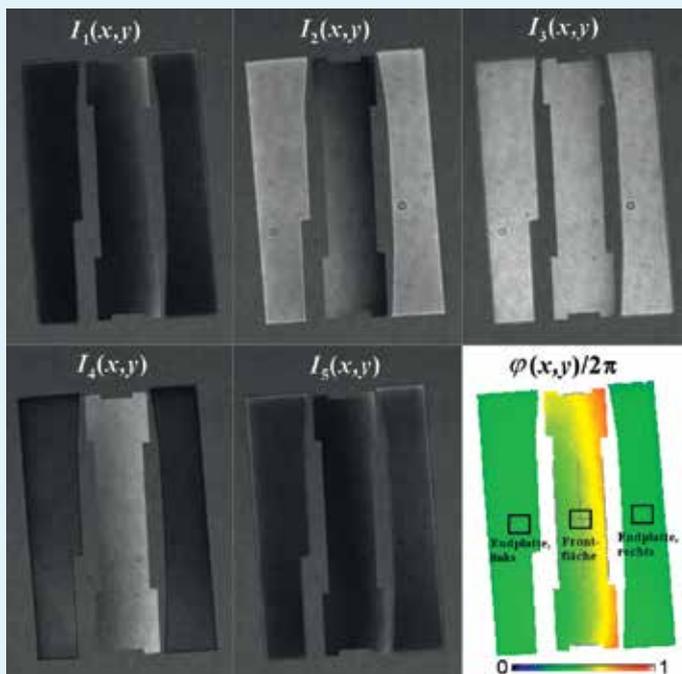


Bild 11

Die sich so ergebende Phasentopografie $\varphi(x, y)$ ist die Grundlage für die Bestimmung des Interferenzbruchteils. Dieser entspricht der Phasendifferenz Frontfläche – Endplatte und wird durch Mittelung innerhalb wohl definierter Bereiche (siehe Rechtecke in der Phasentopografie) berechnet:

$$q = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} (\varphi_{\text{links}}^{\text{Endplatte}} + \varphi_{\text{rechts}}^{\text{Endplatte}}) - \varphi_{\text{mitte}}^{\text{Frontfläche}} \right]$$

Für sub-nm-genaue Längenmessungen muss die Position dieser Bereiche sub-Pixel-genau dem Zentrum der Frontfläche zugeordnet sein, da sonst kleinste Parallelitätsabweichungen zu Fehlern führen.

3.3.1.2. Wie scharf kann bzw. muss der Körper abgebildet werden?

Für eine scharfe Abbildung eines Objektes, u. a. der Kanten eines prismatischen Körpers, muss das abgebeugte Licht die Bildebene auf dem Sensor (CCD) erreichen können. Der in Bild 9 dargestellte Aufbau enthält ein abbildendes System, welches so dimensioniert ist, dass die Frontfläche des Probekörpers „scharf“ abgebildet wird. Die Schärfe dieser Abbildung hängt mit der Größe der Aperturblende im Fokus des Ausgangskollimators zusammen. Diese Blende dient der Unterdrückung von Störreflexen. Je kleiner die Blende, umso weniger an den Kanten gebeugtes Licht kann die Kamera erreichen und zur Schärfe beitragen. Diese allgemein bekannte Grundlage optischer Abbildungen ist in Bild 12 veranschaulicht. Hierbei wurde der Einfachheit halber ein optisches System mit nur einem Objektiv (effektive Brennweite f) angenommen. Ersichtlich wird, dass Beugungsordnungen außerhalb der grün

dargestellten Winkelbereiche an der Aperturblende geblockt werden.

Die optische Abbildung der Frontfläche des Körpers mittels Objektiv sorgt zum einen dafür, dass das Licht, welches an den Kanten gebeugt wird, zur Schärfe des Bildes beiträgt. Zum anderen beeinflusst der wirksame Winkelbereich des gebeugten Lichtes die gemessene Topografie der Interferenzphase. Je größer die Aperturblende, umso weniger ist die Phasentopografie in der Nähe der Kanten verfälscht. Bei sehr kleiner Aperturblende, aber auch bei Verzicht auf eine wirkliche optische Abbildung, d. h. Messung der Interferenz im Querschnitt des Strahlenbündels an einer geeignet erscheinenden Stelle, ergeben sich deutliche „Beugungsringe“ entlang der Kanten, die sowohl als Unschärfe als auch als Phasenfehler in Erscheinung treten.

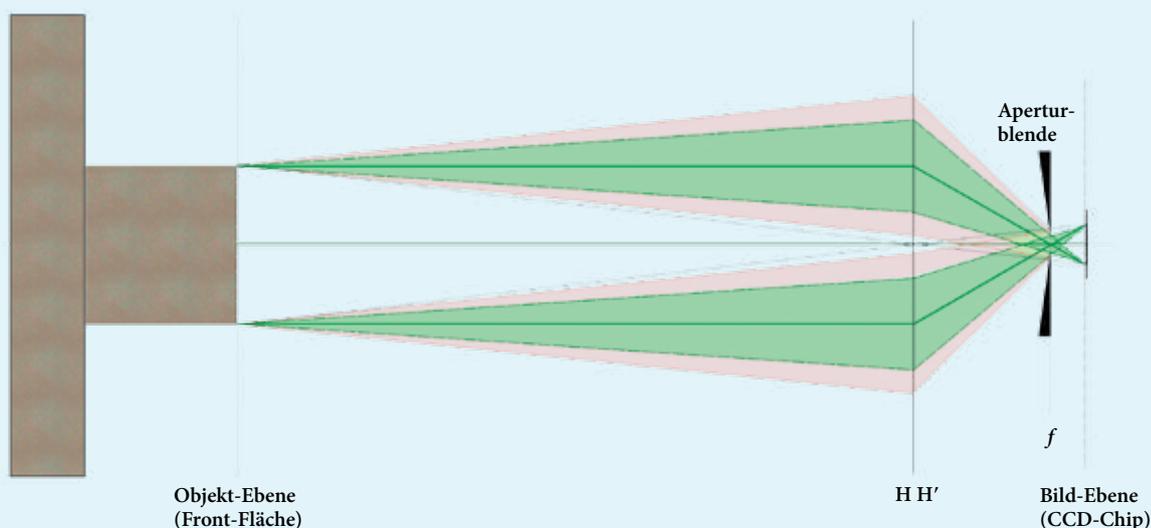


Bild 12



Der prismatische Körper im Messarm des in Bild 9 dargestellten Interferometers verursacht zwei zueinander versetzte Streifensysteme. Der Wert dieses Versatzes entspricht dem Interferenzbruchteil q und repräsentiert das unmittelbare Ergebnis der Messung mittels Interferometrie zur Berechnung der Länge, $l = (i + q)\lambda/2$ (Gleichung (5)).

Die ganzzahlige Interferenzordnung i kann jedoch unter Verwendung von Zusatzinformationen bestimmt werden. Steht nur eine Wellenlänge zur Verfügung, dann muss es einen genau bekannten Vorwert der Nominallänge l_{nom} geben. Durch Setzen von $q = 0$ und Umkehrung von Gleichung (5) lässt sich ein Schätzwert für die ganzzahligen Ordnungen aus dem gerundeten Wert von l_{nom}/λ bestimmen. Allerdings ist hierbei das Risiko eines „Verzählens“ relativ groß, da schon kleinste Abweichungen von der Solltemperatur (gewöhnlich 20 °C), auf welche sich l_{nom} bezieht, zu Längenänderungen führen, welche in Unkenntnis des thermischen Ausdehnungskoeffizienten des Probekörpers nicht genau genug korrigiert werden können. Daher ist es für die Bestimmung der ganzzahligen Interferenzordnungen eigentlich unumgänglich, mindestens zwei separate Wellenlängen zu benutzen. Dies hat den Vorteil, dass sich voneinander unabhängige Längen ergeben, die sich vergleichen lassen und bietet damit auch die Möglichkeit, die gesamte Längenmessung zu überprüfen und Fehler in der Bestimmung von q ebenso aufzudecken wie eine falsch eingestellte Wellenlänge λ der Lichtquelle.

Stehen N verschiedene Wellenlängen $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ zur Verfügung, dann kann man fordern, dass sich für jede Wellenlänge die gleiche Länge $l = l_k$ ergeben soll. Unter dieser Bedingung können die ganzzahligen Interferenzordnungen $\{i_1, \dots, i_N\}$ wie folgt bestimmt werden: i_k wird um die ganzzahligen Beträge δ_k variiert und es wird die Übereinstimmung der sich ergebenden Längen $l_k = (i_k + \delta_k + q_k) \lambda_k/2$ überprüft. Hierbei ist es zweckmäßig, die mittlere Abweichung der Längen l_k von deren Mittelwert $\bar{l} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N l_k$ zu betrachten:

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\bar{l} - l_k| \tag{8}$$

Ordnet man jeder mittleren Länge \bar{l} eine mittlere Abweichung Δ zu, so ergibt sich für eine Menge an Variationen $\{\delta_1, \dots, \delta_N\}$ ein Datensatz der Form $\{\bar{l}, \Delta\}$, der, als Punktwolke dargestellt, ein sogenanntes Koinzidenzmuster ergibt. Bild 13 zeigt ein typisches Beispiel für $N = 2$ und Datenpunkte mit $\Delta < 20$ nm.

In Bild 13 wurden die beiden fiktiven Wellenlängen $\lambda_1 = 532,3$ nm und $\lambda_2 = 548,6$ nm, eine Nominallänge von $l_{nom} = 10$ mm und eine Länge l zugrunde gelegt, die um den Betrag $\delta l = 2,5$ μ m von l_{nom} abweicht. Die zugehörigen Interferenzbruchteile q_1 und q_2 wurden exakt berechnet. Diese eingehenden Größen spiegeln sich in dem Datensatz $\{\bar{l}, \Delta\}$ wie folgt wider:

- Bei $\bar{l} - l_{nom} = \delta l$ ergibt sich ein Minimum mit $\Delta = 0$ (rot gestrichelt markiert).
- Weitere Minima existieren im Abstand der halben synthetischen Wellenlänge λ_{synth} , d. h. bei $\bar{l} - l_{nom} = \delta l + m \cdot \lambda_{synth}/2$. Hierbei beschreibt m ganze Zahlen und $\lambda_{synth} = \lambda_1 \lambda_2 / |\lambda_2 - \lambda_1|$.
- Die nächsten Minima mit $\Delta = 0$ sind um bestimmte Vielfache der halben synthetischen Wellenlänge entfernt von dem bei $\bar{l} - l_{nom} = \delta l$ liegendem Minimum. Im Beispiel von Bild 13 sind diese Vielfachen bei $m = \pm 3$ lokalisiert. Eine allgemeine Aussage lässt sich hierbei jedoch nicht treffen, da die Zahl m stark von der Wahl verwendeter Wellenlängen λ_1 und λ_2 abhängt.
- Die dem Minimum bei $\bar{l} - l_{nom} = \delta l$ nächstgelegenen Längen befinden sich eine Interferenzordnung von dieser entfernt, d. h. bei $\bar{l} - l_{nom} = \delta l \pm (\lambda_1 + \lambda_2)/2$. Der zugehörige Wert für Δ beträgt $|\lambda_1 - \lambda_2|/4$!

Der letztgenannte Punkt macht deutlich, dass die Methode der Koinzidenzfindung einen genügend großen Abstand der Wellenlängen voneinander erfordert. Sind beispielsweise die Wellenlängen λ_1 und λ_2 nur 2 nm voneinander entfernt, dann

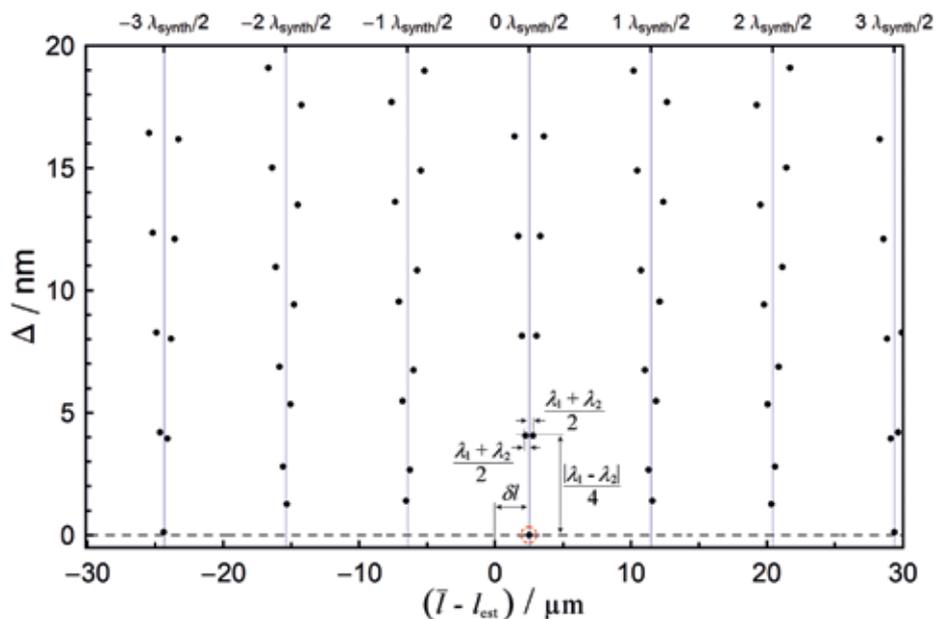


Bild 13: Typisches Koinzidenzmuster bei Verwendung von zwei Wellenlängen

liefert $\{\delta_1, \delta_2\} = \{\delta_1^{\text{opt}} + 1, \delta_2^{\text{opt}} + 1\}$ eine benachbarte Koinzidenz $|l_1 - l_2|$ von nur 1 nm (d.h. $\Delta = 0,5 \text{ nm}$). Diese lässt sich bei realen interferenziellen Längenmessungen schwer von der „eigentlichen“ Koinzidenz bei den optimalen Variationszahlen

$\{\delta_1, \delta_2\} = \{\delta_1^{\text{opt}}, \delta_2^{\text{opt}}\}$ unterscheiden ($\Delta = 0 \text{ nm}$). Der tatsächlich erreichbare Eindeutigkeitsbereich, den die oben beschriebene Variationsmethode abdeckt, hängt also entscheidend von der erreichbaren Unsicherheit von Δ und damit von der Unsi-

3.3.1.3. Kosinusfehler und Blendenkorrektion

Der sogenannte Kosinusfehler entsteht bei interferenziellen Längenmessungen durch nichtsenkrechten Einfall des Lichtes auf die Oberflächen des Probekörpers. Dies äußert sich in einer um den Faktor $\cos \alpha$ zu kurz gemessenen Länge. Für kleine Winkel α ergibt sich der Zusammenhang:

$$\tilde{l} = l \times \cos \alpha \cong l \times \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2\right) \quad \alpha \ll 1$$

zwischen der gemessenen Länge \tilde{l} und der tatsächlichen Länge l eines Körpers. Der auftretende Fehler ist demnach längenabhängig und näherungsweise proportional zum negativen Quadrat des Winkels α . Um den Kosinusfehler zu minimieren, muss das Interferometer so justiert werden, dass das Licht bestmöglich senkrecht zu den optischen Flächen steht.

Hierzu bietet sich ein in der PTB entwickeltes Autokollimations-Verfahren an [10]. Die Grundidee hierbei ist die Beobachtung des zum Eingang des Interferometers zurückkehrenden Lichtes, insbesondere des Anteils des in die Lichtleitfaser rückgekoppelten Lichtes. Dieses wird in Abhängigkeit von der Faserposition gemessen. Befindet sich die Faser in der Brennebene des Kollimators, so repräsentiert die Intensität dieses Retro-Signals den Bereich der Überlappung zweier Kreisscheiben, deren Durchmesser dem Faserdurchmesser entspricht. Die Intensitätsverteilung wird als Funktion der lateralen Faserposition (x, y) gemessen. Im Anschluss wird die Position des Maximums angefahren.

Die Tatsache, dass die als Punktlichtquelle dargestellte Lichtquelle eine bestimmte Größe hat, führt zur sogenannten Blendenkorrektion B . Diese ergibt sich als über die

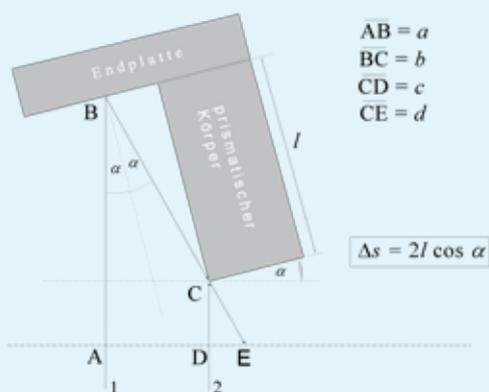


Bild 14

Lichtquelle gemittelter Kosinusfehler. Für eine kreisförmige homogene Lichtquelle (z. B. Multimode-Faser) ergibt sich durch Integration: $B = d^2 / (16f^2)$, wobei d den Durchmesser der Lichtquelle und f die Brennweite des Kollimators bezeichnet. Zur Korrektur einer gemessenen Länge muss diese mit $1 + B$ multipliziert werden. Für $d = 0,25 \text{ mm}$ und $f = 600 \text{ mm}$ ergibt sich beispielsweise eine Blendenkorrektion von ca. $10 \text{ nm je Meter } (10^{-8})$.

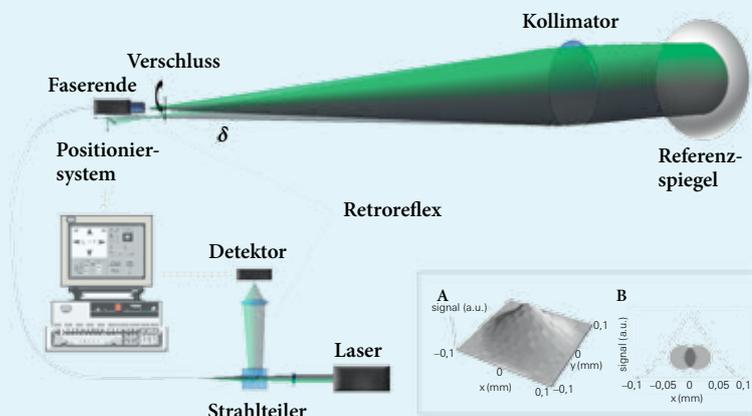


Bild 15

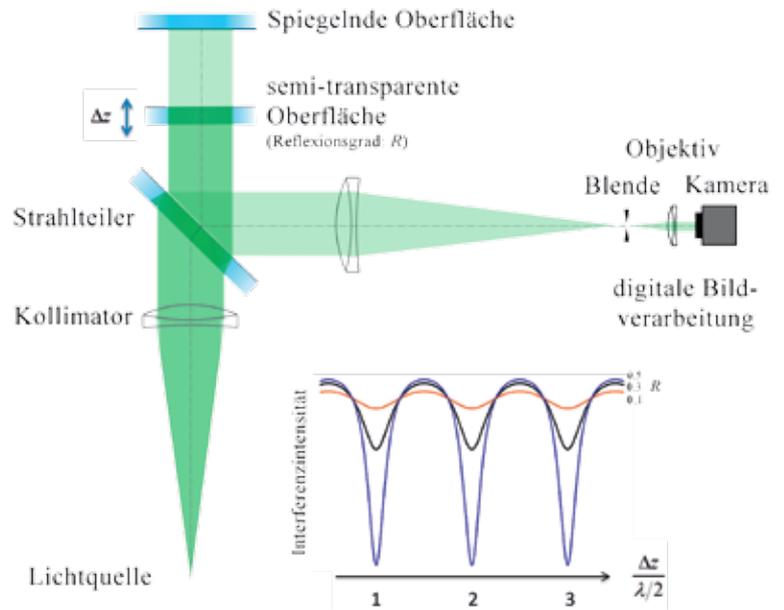
cherheit der Bestimmung der Interferenzbruchteile ab [8]. Der erreichbare Eindeutigkeitsbereich lässt sich prinzipiell durch Verwendung von noch mehr als zwei Wellenlängen, insbesondere bei Messung im Vakuum vergrößern, wie es zum Beispiel am PTB-Ultrapräzisionsinterferometer der Fall ist [9].

3.3.2. Vielstrahlinterferometer

Vielstrahlinterferenz tritt überall dort auf, wo Licht mehrfach reflektiert wird und schließlich zur Überlagerung kommt. Ein allgemein bekanntes Beispiel hierfür sind die sich mit weißem Licht ergebenden farbigen Streifen eines Ölfilms auf Wasser. Dieses Phänomen findet in einfachster Form Anwendung in der Oberflächenprüfung. Dazu wird eine nahezu perfekt ebene Glasplatte auf die Oberfläche des Prüflings gelegt. Visuell lassen sich auch hier farbige Streifen beobachten, deren Anzahl und Richtung von der Neigung der Oberflächen zueinander abhängt. Die Geradheit dieser Streifen ist ein Maß für die Ebenheit des Prüflings.

Ein Vielstrahl-Interferometer wird als Fizeau-Interferometer bezeichnet, wenn der Abstand der beiden ebenen Flächen, an denen Reflexion auftritt, groß im Vergleich zur verwendeten Wellenlänge ist. Bild 16 zeigt einen Spezialfall des Fizeau-Interferometers, wobei die Interferenz des Lichtes in Reflexion betrachtet wird. Das Licht durchläuft eine optische Platte mit semi-transparenter Oberfläche. Ein Teil des von der spiegelnden Oberfläche reflektierten Lichtes wird wiederum an der semi-transparenten Oberfläche reflektiert und durchläuft den Weg zur spiegelnden Oberfläche erneut. Dieser Vorgang wiederholt sich umso häufiger je größer die Reflektivität R der semi-transparenten Oberfläche ist.

Die Intensität der am Ausgang des Interferometers beobachteten Vielstrahlinterferenz ist im Gegensatz zur Zweistrahlinterferenz nicht Kosinus-förmig, sondern genügt der Airy-Formel. Diese Charakteristik der Interferenz ist in dem Einsatz in Bild 16 für verschiedenen Reflexionsgrade eingezeichnet. Mit zunehmender Reflektivität ergibt sich eine immer schärfer werdende Struktur. Die Periodizität dieser Struktur ist, wie



beim Zweistrahlinterferometer, mit der halben Wellenlänge des verwendeten Lichtes gegeben. Häufig finden Fizeau-Interferometer in der Ebenheitsmessung Anwendung. Grundsätzlich ließe sich ein abbildendes Fizeau-Interferometer wie ein entsprechendes Twyman-Green-Interferometer zur Längenmessung von prismatischen Körpern benutzen (z. B. Einsetzen eines Endmaßes anstelle der spiegelnden Oberfläche und Bestimmung des Streifenversatzes wie in Bild 9). Besondere Vorteile in der interferometrischen Längenmessung bietet ein Fizeau-Interferometer in beidseitig messender Anordnung, wie es in Bild 17 dargestellt ist.

Hierbei werden, die in der Abbildung eingezeichneten Abstände Δz_1 , Δz_2 und ΔZ interferometrisch durch sequenzielle Messung von beiden Seiten her bestimmt. Damit ließe sich die Länge einer prismatischen Maßverkörperung aus $l = \Delta Z - \Delta z_1 - \Delta z_2$ bestimmen. Anwendung findet die beidseitige Fizeau-Interferometrie in der PTB in den weltweit einzigartigen Kugelinterferometern, wo anstelle der teildurchlässigen Platten sphärische Referenzflächen eingesetzt werden, um den Durchmesser von Kugeln sub-nm-genau zu bestimmen [11].

Bild 16: Beispiel eines Fizeau-Interferometers mit Beobachtung der Reflexion. Die Charakteristik der Interferenzintensität als Funktion der Lichtwegvariation Δz wird geprägt vom Reflexionsgrad der semi-transparenten Platte (je höher R , umso stärker treten immer schmalere dunkle Streifen in Erscheinung).

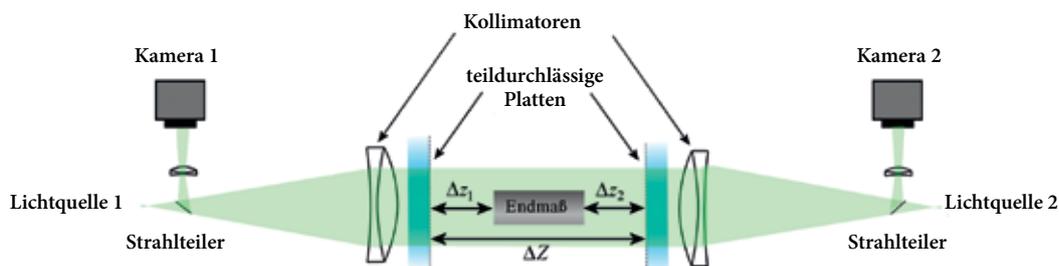


Bild 17: Beidseitiges Fizeau-Interferometer zur Messung der Länge eines Endmaßes

Ein Fabry-Pérot-Interferometer ist grundsätzlich nichts anderes als ein Fizeau-Interferometer, welches mit zwei teildurchlässigen Spiegeln unter Beobachtung des transmittierten Lichtes betrieben wird, im Allgemeinen ist aber der Reflexionsgrad der teildurchlässigen Spiegel größer. Zum Beispiel stellt eine parallele Glasplatte mit aufgedampften Spiegeln ein solches Interferometer dar. Der so entstehende Resonator kann als Maßverkörperung für den optischen Weg, das Produkt aus Brechzahl der Glasplatte und deren Dicke, benutzt werden

und wird auch als Fabry-Pérot-Etalon bezeichnet. Da Fabry-Pérot-Interferometer aus einer breitbandigen Strahlung ein schmalbandiges Spektrum herausfiltern, werden diese oft als optische Filter eingesetzt. Die sogenannte Finesse dient zur Charakterisierung des Resonators. Sie ist definiert als Verhältnis zwischen dem sogenannten freien Spektralbereich $\Delta\lambda$ und der Halbwertsbreite $\delta\lambda$ eines einzelnen Maximums der Interferenzintensität: $\mathcal{F} = \Delta\lambda / \delta\lambda = \pi\sqrt{R} / (1 - R)$. Je größer die Finesse ist, d. h. bei hohen Reflektivitäten R , umso

3.3.2.1. Die Bedeutung von Parallelendmaßen in der „Rückführungskette“

Seit dem 19. Jahrhundert haben sich Parallelendmaße als Maßverkörperungen etabliert, mit denen sich bis heute eine Vielzahl von Längenmessmitteln kalibrieren lassen. Mit einem 103-teiligen Parallelendmaßsatz aus Stahl lassen sich durch Kombination von Endmaßen über 20.000 Maße zwischen 1 mm und 201 mm mit einer Stufung von 0,005 mm realisieren.

Die Länge von Parallelendmaßen lässt sich, wie oben beschrieben, mittels optischer Interferometrie auf die SI-Einheit Meter zurückführen. Die genauesten Parallelendmaße dienen als Bezugsnormale in mechanischen Unterschiedsmessungen, die als Dienstleistung von akkreditierten Kalibrierlaboratorien für Längenmessung angeboten werden.



Bild 18: Parallelendmaßsatz aus Stahl, 103-teilig



Bild 19: Prinzip der mechanischen Unterschiedsmessungen von Parallelendmaßen

Bild 20: Kette der Rückführung auf die SI-Einheit Meter am Beispiel von Parallelendmaßen, DAkkS: Deutsche Akkreditierungsstelle, NMI: Nationales Metrologieinstitut (in Deutschland die PTB)





schmalbandiger ist das gefilterte Licht. Ein extrem stabiler Fabry-Pérot-Resonator mit besonders hoher Finesse wurde kürzlich an der PTB entwickelt und aufgebaut. Dieser aus einkristallinem Silicium bestehende Resonator erlaubt es, das Licht kommerzieller Lasersysteme auf die unvorstellbar kleine Frequenz von 0,04 Hz genau, d. h. auf besser als 10^{-16} , zu stabilisieren. [12]

3.4. Bestimmung der Brechzahl der Luft

Die Darstellung der Länge von Körpern mittels Interferometrie, z. B. bei Primärkalibrierungen von Parallelendmaßen, erfolgt fast immer in Luft, u. a. weil Maßverkörperungen auch unter atmosphärischen Bedingungen als Längennormale benutzt werden. Die Anwesenheit der Luft reduziert die Wellenlänge des Lichtes (λ) im Vergleich zur Vakuumwellenlänge (λ_0) maßgeblich und ist damit bestimmend für die interferometrisch gemessene Länge:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n(\lambda_0, p, t, f, x)} \quad (9)$$

Die Brechzahl der Luft, n , hängt zum einen von der Wellenlänge selbst, zum anderen von den Umgebungsbedingungen, Luftdruck p , Lufttemperatur t , Luftfeuchte f und dem CO_2 -Gehalt x ab. Da n nahe der Zahl Eins ist, skaliert der relative Einfluss der Luftbrechzahl auf die Länge mit der sogenannten Refraktivität, $n - 1$ (Näherung: $1/n|_{n \approx 1} \approx 1 - (n - 1)$).

Die genaue Bestimmung der Luftbrechzahl ist eine wesentliche Limitierung für die Genauigkeit einer Längenmessung und kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen:

- A) hochgenaue Messung der o. g. Luftparameter und Bestimmung der Luftbrechzahl mittels einer empirischen Formel, $n(\lambda, p, t, f, x)$ [13]
- B) interferometrisch mittels Luftrefraktometer. Das Grundprinzip der genauesten interferometrischen Brechzahlbestimmung ist in Bild 21 gezeigt.

Eine von beiden Seiten mittels großflächiger Fenster geschlossene evakuierte Zelle befindet sich im Messarm eines abbildenden Twyman-Green-Interferometers (z. B. wie in Bild 9.).

Das kollimierte Bündel von Lichtstrahlen durchläuft zum einen das evakuierte Innere der Zelle, zum anderen passieren Lichtstrahlen die Zelle (und die Fenster) außerhalb, entlang des gleichen geometrischen Weges. Die Länge der Vakuumzelle, ausgedrückt als Produkt der Interferenzordnungen $i + q$ (d. h. ganzzahlige Ordnungen + Interferenzbruchteil) und der (halben) Wellenlänge, lässt sich daher auf zwei verschiedene Weisen ausdrücken:

$$l_{\text{cell}} = (i_{\text{vac}} + q_{\text{vac}}) \frac{\lambda_0}{2} = (i_{\text{air}} + q_{\text{air}}) \frac{\lambda_0}{2n} \quad (10)$$

worin der Suffix „vac“ den Lichtweg im Vakuum und der Suffix „air“ den Lichtweg in Luft bezeichnet. Gleichung (10) liefert die Brechzahl der Luft:

$$n = 1 + \frac{1}{l_{\text{cell}}} \left(\overbrace{i_{\text{air}} - i_{\text{vac}}}^{\tilde{i}} + \overbrace{q_{\text{air}} - q_{\text{vac}}}^{\tilde{q}} \right) / \lambda_0 / 2 \quad (11)$$

worin l_{cell} die Länge der Vakuumzelle bezeichnet, die auf wenige Mikrometer genau bekannt sein muss. Die ganzen Zahlen \tilde{i} lassen sich aus $\tilde{i}^{\text{est}} = (n^{\text{est}} - 1) l_{\text{cell}} / \frac{1}{2} \lambda_0$ abschätzen, wobei n^{est} den Vorwert der Brechzahl nach o. g. Methode A) bezeichnet. \tilde{q} bezeichnet den Interferenzbruchteil, der sich aus der Interferenzphasentopografie bestimmen lässt (siehe rechts in Bild 21):

$$\tilde{q} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} (\phi_{\text{air}}^1 + \phi_{\text{air}}^2) - \phi_{\text{vac}} \right],$$

worin $\phi_{\text{air}}^1, \phi_{\text{air}}^2$ und ϕ_{vac} mittlere Phasenwerte innerhalb der kreisförmigen Bereiche im Lichtweg Vakuum „vac“ und Luft „air“ bezeichnen.

Werden mehrere Wellenlängen für die interferometrische Längenmessung benutzt, so muss die Luftbrechzahl natürlich für jede dieser Wellenlängen bestimmt werden. Ähnlich wie bei der Längenmessung selbst finden Koinzidenzverfahren auch bei der interferometrischen Brechzahlbestimmung Anwendung (Näheres dazu in [8]).

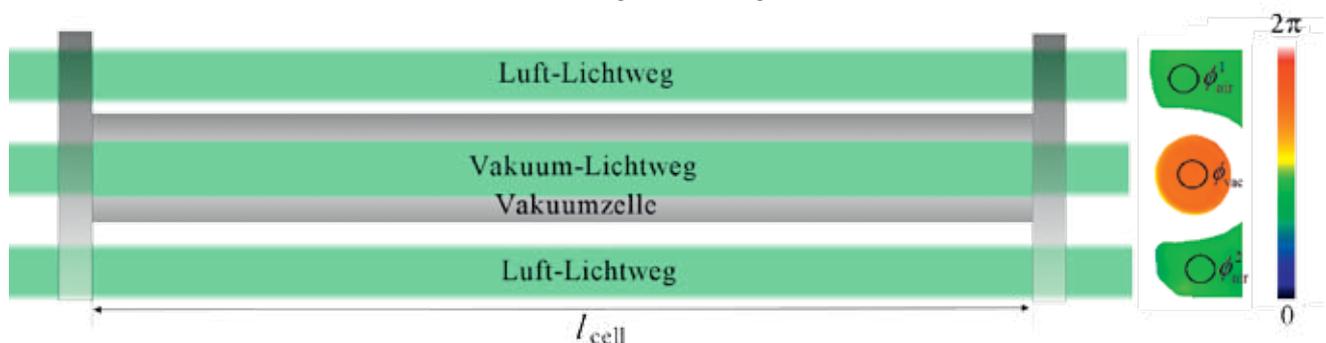


Bild 21: Schematische Darstellung zur interferometrischen Brechzahlbestimmung der Luft mittels Vakuumzelle

Bei der Messung großer Längen kommt ein drittes Verfahren, die sogenannte Brechzahlkompensation, zum Einsatz:

C) Beim Brechzahlkompensationsverfahren bedient man sich zweier verschiedener Wellenlängen, z. B. 532 nm und 1064 nm, wie sie gleichzeitig von einem Nd:YAG-Lasersystem bereitgestellt werden können.

Die Grundidee der Brechzahlkompensation besteht in der Betrachtung der Differenz zwischen beiden Messungen, unter Voraussetzung einer bekannten Wellenlängenabhängigkeit (Dispersion) der Luftbrechzahl (entsprechend empirischer Formel, siehe A)). In trockener Luft skaliert die Refraktivität mit dem sogenannten Dispersions-term: $n - 1 \sim K(\lambda)$ und daher ist für zwei Wellenlängen folgender Zusammenhang gegeben:

$$\frac{n_1 - 1}{n_2 - n_1} = \frac{K(\lambda_1)}{K(\lambda_2) - K(\lambda_1)} = A(\lambda_1, \lambda_2), \quad (12)$$

worin der Parameter A nur von den beiden verwendeten Wellenlängen, also nicht von Parametern der Luft abhängt. Betrachtet man zwei interferometrische Längenmessungen entlang derselben Länge l , die mit zwei verschiedenen Wellenlängen durchgeführt wurden, so lässt sich l jeweils ausdrücken als Vielfaches der halben Wellenlänge in Luft und der gemessenen Interferenzphase ($\varphi = 2\pi(i + q)$), d. h. als $l = \varphi_1 \frac{1}{2} \lambda_1 / n_1$ bzw. als $l = \varphi_2 \frac{1}{2} \lambda_2 / n_2$. Entsprechend Gleichung (12) lässt sich dieselbe Länge aber auch so ausdrücken:

$$l = \varphi_1 \frac{1}{2} \lambda_1 - A(\lambda_1, \lambda_2) (\frac{1}{2} \lambda_2 \varphi_2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \varphi_1). \quad (13)$$

Gleichung (13) erlaubt demnach prinzipiell die Bestimmung der Länge einer Strecke mittels zwei Wellenlängen ohne Kenntnis der Luftbrechzahl. Nachteil dieser Methode ist allerdings, dass Fehler in der Phasenmessung durch Skalierung mit dem großen Faktor A zu einer größeren Messunsicherheit der Länge führen. Gleichung (13) gilt zudem exakt nur für trockene Luft. Eine Erweiterung für feuchte Luft ist in [14] beschrieben.

3.5. Schlussbemerkung

Die Darstellung einer Länge gemäß der Definition des Meters im internationalen Einheitensystem erfordert ein Messprinzip, welches einen Zusammenhang zwischen der Laufzeit von Licht im Vakuum und der zu messenden Länge herstellt. Hierzu bieten sich grundsätzlich zwei Verfahren an: a) die direkte Messung einer Laufzeitdifferenz wie sie im Kapitel 2. beschrieben ist und b) Interferometrie mit Licht (Kapitel 3.), die im

Kern auch nichts anderes ist als eine Messung von Laufzeitunterschieden. Einige der wichtigsten Grundprinzipien interferometrischer Verfahren zur Darstellung der Länge sind in diesem Beitrag beschrieben. Bei allen macht man sich die Welleneigenschaften des Lichtes zunutze. Das Prinzip der interferometrischen Längenmessung lässt sich relativ einfach praktisch realisieren. Allerdings sind die Grenzen der möglichen Genauigkeit sehr schnell erreicht. Für die in der Praxis relevante Darstellung von Längen mittels Interferometrie ist, je nach Anwendung, eine relative Messunsicherheit im Bereich 10^{-7} , 10^{-8} oder sogar 10^{-9} (1 nm auf 1 m), erforderlich. Ausgehend von der Verfügbarkeit heutiger Laserlichtquellen, deren Frequenz eine Messunsicherheit von üblicherweise besser als 10^{-10} aufweist, kann man zunächst feststellen, dass die Frequenz des Lichtes heutzutage die geringste Herausforderung bei der Reduzierung der Messunsicherheit einer Längenmessung ist. Im Bestreben die Darstellung einer Länge genauer zu machen rücken daher andere Begrenzungen in den Vordergrund, nämlich jene, die einen direkten Einfluss auf das Ergebnis der Messung mittels Interferometrie haben. Zu diesen gehören u. a. die in diesem Beitrag genannte Genauigkeit der Interferenzphasenmessung, der Einfluss der Luftbrechzahl, aber auch gegebene Grenzen der Qualität und Justage von optischen Komponenten, die nicht beliebig genau gefertigt werden können. Oft basieren Auswertungen auf Annahmen, die bezogen auf neue Anforderungen nicht mehr aufrecht erhalten werden können. Dies macht das Ringen um Verbesserungen zu einem zähen Kampf, der den Akteuren ein hohes Frustrationspotenzial, aber auch Aufgeschlossenheit gegenüber eigenen Fehlern abverlangt. Die heute erreichbaren Messunsicherheiten hätten die Urväter der interferometrischen Verfahren sicher nicht für möglich gehalten.

Literatur

- [1] N. Huntemann, M. Okhapkin, B. Lipphardt, S. Weyers, C. Tamm and E. Peik; 2012, High-accuracy optical clock based on the octupole transition in $^{171}\text{Yb}^+$, Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 090801
- [2] Recommended values of standard frequencies: <http://www.bipm.org/en/publications/mis-es-en-pratique/standard-frequencies.html> (Letzter Zugriff am 15.9.2015)
- [3] P. Cordiale, G. Galzerano and H. Schnatz; International comparison of two iodine-stabilized frequency-doubled Nd:YAG lasers at 532 nm, Metrologia **37** (2000) 177–182
- [4] C.W. Chou, D.B. Hume, T. Rosenband, D.J. Wineland; Optical Clocks and Relativity, Science **329** (2010) 1630–1633



- [5] *M. Wedde, K. Meiners-Hagen, A. Abou-Zeid*; Interferometrische Kalibrierung von Strichmaßen, Laserinterferometern und Entfernungsmessgeräten: Die Geodätische Basis der PTB, PTB-Mitteilungen **2/2010** (2010) 120–123, <http://www.ptb.de/cms/?id=2744> (Letzter Zugriff am 16.12.2015)
- [6] *C. Weichert, P. Köchert, R. Köning, J. Flügge, B. Andreas, U. Kuetgens and A. Yacoot*; A heterodyne interferometer with periodic nonlinearities smaller than ± 10 pm, Meas. Sci. Technol. **23** (2012) 094005
- [7] *S. Tang*; Self-calibrating five frame algorithm for phase shifting interferometry Proc. SPIE **2860** (1996) 91–7, <http://dx.doi.org/10.1117/12.276293>
- [8] *R. Schödel*; Utilisation of coincidence criteria in absolute length measurements by optical interferometry in a vacuum and in air, Meas. Sci. Technol. **26** (2015) 084007, <http://dx.doi.org/10.1088/0957-0233/26/8/084007>
- [9] *R. Schödel, A. Walkov, M. Zenker, G. Bartl, R. Meeß, D. Hagedorn, D. Gaiser, G. Thummes and S. Heltzel*; A new Ultra Precision Interferometer for absolute length measurements down to cryogenic temperatures; Meas. Sci. Technol. **23** (2012) 094004 (19pp), <http://dx.doi.org/10.1088/0957-0233/23/9/094004>
- [10] *R. Schödel, G. Bönsch*; Highest accuracy interferometer alignment by retroreflection scanning, Appl. Opt. **43** (2004) 5738–5743
- [11] *R. A. Nicolaus, G. Bönsch*; A novel interferometer for dimensional measurement of a silicon sphere, IEEE Trans. Instrum. Meas. **46** (1997) 563–565
- [12] *T. Kessler, C. Hagemann, C. Grebing, T. Legero, U. Sterr, F. Riehle, M.J. Martin, L. Chen, J. Ye*; A sub-40-mHz linewidth laser based on a silicon single-crystal optical cavity, Nature Photonics **6** (2012) 687–692
- [13] *G. Bönsch and E. Potulski*; Measurement of the refractive index of air and comparison with modified Edlén's formulae, Metrologia **35** (1998) 133–9
- [14] *K. Meiners-Hagen and A. Abou-Zeid*; Refractive index determination in length measurement by two-colour interferometry, Meas. Sci. Technol. **19** (2008) 084004, <http://dx.doi.org/10.1088/0957-0233/19/8/084004>

Ultrastabiles Differenz-Interferometer Serie SP-DI

- Interferometer für Differenzmessungen höchster Stabilität mit einer Auflösung von 20 pm
- Temperaturkoeffizient: < 20 nm/K
- Längenmessbereich: 2 m, Winkelmessbereich: $\pm 1,5'$
- Für Materialuntersuchungen und Langzeitmessungen
- Auch mehrkanalige Ausführung möglich



SIOS Meßtechnik GmbH
Am Vogelherd 46
D-98693 Ilmenau
Tel.: +49-(0)3677/6447-0
E-mail: contact@sios.de
www.sios.de

SIOS 
Meßtechnik GmbH

